数理の玉手箱

藤井一幸（編集）
鈴木達夫
浅田　明
待田芳徳
岩井敏洋

行列の指数法則？——ベーカー - キャンベル - ハウスドルフへの扉

非可換ワールドへの招待——準行列式の話

関数を 1/2 回微分する——分数冪微積の話

ツイスターから眺める微分方程式——パス（道），コーン（錐）を開く

宙返りの奥義——幾何，力学，制御

発行　遊星社

数理の玉手箱

藤井一幸（編集）
鈴木達夫
浅田　明
待田芳徳
岩井敏洋

遊星社

はしがき

私たちは毎年沼津高専に集まり，幾何，数理物理，そして量子論に関する「沼津研究会」を開催して（2010年3月現在）17回を数える．そこでは基本的に何を話してもよく，自分の研究結果を発表したり，最新の研究分野をレビューしたり，忘れられた研究を紹介したり，といろいろである．しゃべる時間は基本的に制限がなく，質問は全く自由で，おやじギャグが飛び交う自由な雰囲気があり，大体20人前後で盛況である．例えば,「御殿場（古典場）を下って，沼津の漁師場（量子場）であじの干物（ひも (string) の）理論を調べる」等が飛び交っている．

私たちは主に数理物理学を研究している．物理の定義のはっきりしない，わかりにくい点を俎(まな)板に載せ数学的に料理している(と思っている)．そこから数学的に見て“おいしい素材”を得ようとしているのである．物理はターゲットがはっきりしておりまた競争が激しいので“先を急ぐ”ため，定義等は数学者に任せる（!）という態度が底にあるのかもしれない．

この研究会の話題にはあまり知られていないが非常に面白いものがたくさんある．例えば，微分の授業で関数を1回微分する，2回微分する，$\cdots$と習うのだが，では$\frac{1}{2}$回微分したいときはどうするのか？ 比較的有名な分数冪微分の話である．もしそのような半端な“微分”が数学的に定義されたとしたら，ライプニッツの公式はどのようになるのか？ “微分”と積分との関係は？ 変数変換の公式は？ $\cdots$と次々に疑問が出てくる．一部の専門家には

よく知られていることであるが，多くの学生や社会人には「なに？ それ！」であろう．

子供にとって玉手箱の宝物のように，これらのトピックスは私たちにとっては宝物なのである．多くの人に見せて自慢したい気もあるし，立派に熟成するまではじっと見守ってやりたい気もあるといったところである．そのようなトピックスの中から大学生だけでなく意欲的な高校生でも（ある程度）楽しめるようなものを選んで本にしようということになった．それゆえ本のタイトルを「数理の玉手箱」とした(はじめ「数理物理の玉手箱」としていたが，内容が数理物理に限らないのでこのようにした)．

この本の位置づけとしては，雑誌『数理科学』の特集記事と専門書の中間あたりである．決して教科書風にするつもりはなく，もちろん専門書にするつもりもなく，新しいジャンルを開拓したいと願っている．

この本のターゲットとしては，理系の大学生・大学院生だけではなく，中学・高校の数学教師も考慮している．本を読んで面白いと思えば，ぜひ意欲的な高校生に紹介してほしい．15, 16, 17 歳と本当の意味で貴重な 3 年間を高校の教科書・参考書だけで過ごすにはあまりにもったいない．イギリスのパブリック・スクールとして有名なイートン校（正確には，イートン・カレッジ）では 16 歳で学術論文を書く強者もいるのである．

藤井が音頭をとって浅田先生，岩井先生，待田先生，鈴木先生に執筆をお願いした．本としてのページ数の制限もあり，これ以上増やすことができなかったのは残念である．各自 40 ページ以内で(長いとダレてしまう)，あまり知られてはいないが面白いトピックスを選び，単なる解説ではなく自分の研究結果もスパイスとして加え，高校生でもある程度読めるように工夫して，読者の好奇心に火をつける（!）ことが私たちの基本戦略である．成功しているかどうかは読者の判断に任せよう．

ここで大事なことは，これらのトピックスに私たちの研究結果が一部加味されているということである．過去の偉大な研究者の結果を紹介するだけではつまらないからである．それゆえ専門家にも少しは満足してもらえると思う．

最後に，「沼津研究会」の初期の頃からの“仲間”である大貫義郎先生，大森英樹先生，野尻伸一先生には深く感謝の意を捧げる．彼らとの真摯な議論がなければ，この本の出版はなかったに違いない．

2010 年 10 月

藤井 一幸

目　次

非可換ワールドへの招待—— 準行列式の話

行列の指数法則？

ベーカー - キャンベル - ハウスドルフへの扉

藤井 一幸

概 要

この小論で数学の基本公式の一つであるベーカー - キャンベル - ハウスドルフ (Baker-Campbell-Hausdorff) の公式の紹介とその発展を議論する．その形は正方行列に対して

$$e^A e^B = e^{A+B+(1/2)[A,B]+(1/12)\{[[A,B],B]+[[B,A],A]\}+\cdots}$$

で与えられ，簡単のために

$$BCH(A,B) \equiv$$
$$A+B+(1/2)[A,B]+(1/12)\{[[A,B],B]+[[B,A],A]\}+\cdots$$

とおく．これは複雑な無限級数ではあるが，先頭の $A+B$ を除いて交換子積 $[X,Y]=XY-YX$ を用いて書き下せるというのがセールス・ポイントである．

この公式は数学の最も基本的な公式の一つである．しかしその証明は案外やっかいで，数学科を卒業した人でもほとんど知らないと思われる．

この小論の前半で，ザコス (Zachos) 氏の方法を用いて公式の証明を与える．それは計算のアルゴリズムを与えるもので比較的わかりやすい．

後半で，特に群が $SO(4)$ の場合に $BCH(A,B)$ が厳密に計算できることを示す．たぶん驚く人もいるに違いない．その方法は，よく知られた同型 $SU(2)\otimes SU(2)\cong SO(4)$ と比較的新しい量子計算の手法を用いるハイブリッドなもので非常に面白い．

1　はじめに

研究者にとってつらい（さみしい）ことの一つは，自分が自信をもって送り出した結果があまり評価されず，忘れられてゆくことである．年配の研究者ならたぶん経験済みであろう．そのような中で“本質を突いた定理”や“汎用性のある公式”のみが教科書に載り，忘却から免れるのである．もちろん時代の変化による栄枯盛衰はあるのだが．

この小論で議論するベーカー‐キャンベル‐ハウスドルフの公式は汎用性のある公式の代表例であり，(線形)微分方程式が出てくるほとんどすべての分野で使われている．

学生時代の私はやる気は満々だったが，やや理解力に欠ける学生だった．当時の教科書は相当に抽象的，一般的で，そのような思考を好まない私にとってはつまらないものであった．好きだった微分方程式でも一般論はダメで具体的なものを勉強していた．

この小論は若き日の自分に話して聞かせるように書いてある．彼に「面白い！」と言わせるために．そして大学生・大学院生だけでなく，意欲的な高校生にも読めるように細心の注意を払っている．それでも**ある程度**「微分・積分」および「ベクトル・行列」の扱いに慣れていることを仮定する．ベクトルと行列に関する標準的な教科書として横田一郎先生たちの [1] を推薦しておく．

2　問題の設定

まず問題の設定から始めよう．紙と鉛筆を持ってフォローしてほしい．

指数関数 $y = y(x)$ は

$$\text{微分方程式} \quad \frac{dy}{dx} = y \ ; \quad \text{初期条件} \quad y(0) = 1 \tag{2.1}$$

と定義される．

天下りに解を与えると

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

となる．実際 $y(0) = 1$ は明らかで

$$y' = 0 + 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = y$$

となる．以後 $y = e^x$ と書く．すなわち

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.2}$$

である．この指数公式は

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n+m=k} \frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{(k-m)!m!} x^{k-m} y^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_m x^{k-m} y^m\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y} \end{aligned} \tag{2.3}$$

となる．ここで二項展開の公式

$$(x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_m x^{k-m} y^m \tag{2.4}$$

を使った．

本文で必要となるオイラー (Euler) の公式を示しておく．関数 $\cos x$, $\sin x$ のテイラー (Taylor) 展開は

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

で与えられる．これより

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

は明らかである．

以上のもとで有名なオイラーの公式

$$\begin{aligned} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned} \tag{2.5}$$

を得る．

次に実数 x を n 次の正方行列 $X = (x_{ij})$ に代えて，行列の指数関数（以下，指数行列と呼ぶ）e^X を

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n \tag{2.6}$$

と定義する．ここに $E = (\delta_{ij})$ は n 次の単位行列である $(EX = XE = X)$．写像を強調したいときは e^X の代わりに $\exp(X)$ と書くことがある．

では，指数行列に対しても指数公式

$$e^A e^B = e^{A+B} \quad (A,\ B \text{ は正方行列})$$

は成り立つのであろうか？

残念ながら **NO** である．その理由は，行列では一般に A と B が交換しないからである $(AB \neq BA)$．大雑把に言えば

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots\right)\left(E + B + \frac{1}{2}B^2 + \cdots\right) \\ &= E + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \cdots \end{aligned}$$

で，他方

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E+(A+B)+\frac{1}{2}(A+B)^2+\cdots \\ &= E+A+B+\frac{1}{2}(A^2+AB+BA+B^2)+\cdots \end{aligned}$$

で，$AB \neq BA$ より $e^A e^B \neq e^{A+B}$ である．

もちろん $AB = BA$ ならば $e^A e^B = e^{A+B}$ で，実数の場合と本質的に変わらない．もう少し詳しく見てみよう．

〔例〕 2 次の正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．もちろん

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

である．A, B は

$$A^2 = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすので，$A^n = O$, $B^n = O$ $(n \geq 2)$ より

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．

他方

$$\sigma \equiv A+B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

より

$$\sigma^{2n} = (\sigma^2)^n = E^n = E, \quad \sigma^{2n+1} = \sigma^{2n}\sigma = E\sigma = \sigma \quad (n \geq 0)$$

なので

$$\begin{aligned} e^\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sigma^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\sigma^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\sigma^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\sigma \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\right)E + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\right)\sigma \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e+e^{-1}}{2} & \frac{e-e^{-1}}{2} \\ \frac{e-e^{-1}}{2} & \frac{e+e^{-1}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．ここに

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

より $x = 1,\ -1$ として

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}, \quad e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

なので

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{e-e^{-1}}{2}$$

を使った．たしかに

$$e^Ae^B \neq e^{A+B}$$

であることがわかる．

[コメント]　違いを見てみよう．

$$e^Ae^B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

であるが，他方 $e\approx 2.72$ なので

$$e^{A+B}=\begin{pmatrix}\frac{e+e^{-1}}{2} & \frac{e-e^{-1}}{2}\\ \frac{e-e^{-1}}{2} & \frac{e+e^{-1}}{2}\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1.55 & 1.18\\ 1.18 & 1.55\end{pmatrix}$$

となる．むちゃくちゃに異なるわけでもない．この点が重要である．

[コメント]　〔例〕の計算（$x=1,\ -1$）で使った関数 $\cosh x$, $\sinh x$ は

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

と定義されるが，以下の本文では出てこないので深入りしない．

では

$$e^Ae^B=e^Z$$

としたとき，Z は A と B の関数としてどのように表されるのだろうか？これに対する解答が有名なベーカー - キャンベル - ハウスドルフの公式である [8]．もちろん簡単な式でないことは上の例から明らかであろう．

3 ベーカー - キャンベル - ハウスドルフの公式

この節でベーカー - キャンベル - ハウスドルフの公式（以下簡単のためBCH-公式）の紹介をする．考える体（タイ）は $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}$ とする．そして $\boldsymbol{K}$ 上の $n\times n$ 行列全体を $M(n;\boldsymbol{K})$ とおく．

$$X=(x_{ij})\in M(n;\boldsymbol{K})$$

ここで一つ記号を導入しよう．行列では一般に積は交換しないので，その差が重要になる．すなわち，X, $Y\in M(n;\boldsymbol{K})$ に対して

$$[X,Y]=XY-YX \tag{3.1}$$

とおき，これを X と Y の交換子積と呼ぶ．これに関する基本的な性質をリストしておく．

(a) （反交換性） $[Y,X]=-[X,Y]$,

(b) （線形性） $[\alpha X+\beta Y,Z]=\alpha[X,Z]+\beta[Y,Z]$ for $\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$,

(c) （ヤコビ律） $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=O$.

練習問題 証明せよ．

以下の計算に必要なことを説明する．行列 $X=(x_{ij})$ の各成分 x_{ij} がパラメータ t の関数のとき $X(t)=(x_{ij}(t))$ と書く．このとき微分は

$$\frac{dX}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_{ij}(t+\Delta t)-x_{ij}(t)}{\Delta t}\right)=\left(\frac{dx_{ij}}{dt}\right)$$

で与えられる（要するに，各成分を一斉に微分すればよいだけである）．X, Y がともに t の関数のとき，ライプニッツの規則

$$\frac{d}{dt}(XY)=\frac{dX}{dt}Y+X\frac{dY}{dt} \tag{3.2}$$

が成り立つことがわかる.

練習問題 証明せよ(最初 $n = 2$ の場合に各成分を書いてみよ).

したがって (3.1) から

$$\frac{d}{dt}[X, Y] = [\frac{dX}{dt}, Y] + [X, \frac{dY}{dt}]$$

がわかる. また (2.6) より

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

は明らかであろう. ただし, $A = A(t)$ のとき一般に

$$[A, \frac{dA}{dt}] \neq O \implies \frac{d}{dt}e^{A(t)} \neq \frac{dA}{dt}e^{A(t)}$$

であることに注意せよ. $e^{A(t)}$ の微分計算は楽ではない(以下の証明を見よ).

もう一つ量子力学と関係がある重要な概念を導入しておく. 関数 $f(x)$ や微分 $\frac{d}{dx}$ をオペレータ[1] とみなして, ある関数空間に作用させる. $g = g(x)$ をそのような空間の任意の元として

$$f : g(x) \longrightarrow f(x)g(x) \ ; \quad \frac{d}{dx} : g(x) \longrightarrow \frac{dg}{dx}$$

と定義する. もちろん $f(x)$ と $\frac{d}{dx}$ とは交換しないので, その差が重要になる.

$$\left([\frac{d}{dx}, f]\right) g = \left(\frac{d}{dx}f - f\frac{d}{dx}\right) g = \frac{d(fg)}{dx} - f\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx}g$$

で, $g = g(x)$ は任意なので

$$[\frac{d}{dx}, f] = \frac{df}{dx} \tag{3.3}$$

を得る. 特に $f(x) = x$ のとき, 有名な交換関係 $[\frac{d}{dx}, x] = 1$ を得る [2].

---

1) 無限次元の行列をオペレータまたは作用素と呼ぶ.

以上の準備のもとで BCH-公式を述べよう.

BCH-公式 (Baker-Campbell-Hausdorff)

$$e^A e^B = e^{BCH(A,B)} \tag{3.4}$$

ここに $BCH(A,B)$ は

$$\begin{aligned} BCH(A,B) &= A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}\{[[A,B],B]+[[B,A],A]\}+ \\ &\quad \frac{1}{24}[[[B,A],A],B]+\cdots \end{aligned} \tag{3.5}$$

で，$A+B$ を除いて交換子積 $[X,Y]=XY-YX$ を用いて書き下せる．Zachos [9] に従って証明を与える（クリブ・ノートとはカンニング帳で，アメリカの有名教授でも必要らしい）．はじめ内容を全面的に書き直そうかと考えたのだが，せっせとカンニング帳を作る Zachos 氏に敬意を払って比較的忠実に紹介する．

スケール・パラメータ t を導入する．すなわち，

$$e^{tA}e^{tB} = e^{Z(t)}$$

とおく（簡単のため，$Z(t)=BCH(t;A,B)$ とおいた）．そして $Z(t)$ の満たす微分方程式を求める（これは**常套手段**！）．

補題 I

$$\frac{d}{dt}e^{Z(t)} = \int_0^1 e^{(1-s)Z(t)}\frac{dZ}{dt}e^{sZ(t)}ds \tag{3.6}$$

証明　微分をオペレータとみなし $D=\frac{d}{dt}$ とおく．そして簡単のため $Z=Z(t)$ と書く．このときライプニッツの規則より

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-sZ}De^{sZ}\right) = e^{-sZ}(-ZD+DZ)e^{sZ} = e^{-sZ}[D,Z]e^{sZ}.$$

また (3.3) より

$$[D,Z] = \frac{dZ}{dt}$$

なので

$$\frac{d}{ds}\left(e^{-sZ}De^{sZ}\right) = e^{-sZ}\frac{dZ}{dt}e^{sZ}$$

を得る．これを 0 から 1 まで積分すると

$$\left[e^{-sZ}De^{sZ}\right]_0^1 = e^{-Z}De^{Z} - D = \int_0^1 e^{-sZ}\frac{dZ}{dt}e^{sZ}ds.$$

左から e^Z を掛けると

$$De^Z - e^Z D = \int_0^1 e^{(1-s)Z}\frac{dZ}{dt}e^{sZ}ds$$

で，左辺は再び (3.3) より

$$De^Z - e^Z D = [D, e^Z] = \frac{d}{dt}e^Z$$

となり補題 I を得る．QED

補題 II

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots \tag{3.7}$$

証明　$F(s)$ を

$$F(s) = e^{sA}Be^{-sA} \quad ; \quad F(0) = B$$

とおき，s で微分する．ライプニッツの規則より

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= A\left(e^{sA}Be^{-sA}\right) + \left(e^{sA}Be^{-sA}\right)(-A)\\ &= AF(s) - F(s)A = [A, F(s)]\end{aligned}$$

が成り立つ．もう一度微分すると

$$\frac{d^2}{ds^2}F(s) = [A, \frac{d}{ds}F(s)] = [A,[A,F(s)]]$$

となる．これを繰り返すと

$$F^{(n)}(s) \equiv \frac{d^n}{ds^n}F(s) = [A,[A,[A,\cdots,[A,F(s)]\cdots]]] \quad (n\,\text{回})$$

がわかる．$s=0$ でのテイラー展開（正確にはマクローリン展開）の公式

$$F(s) = F(0) + F'(0)s + F''(0)\frac{s^2}{2!} + \cdots + F^{(n)}(0)\frac{s^n}{n!} + \cdots$$

より $s=1$ とおくと

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \cdots$$

となり補題 II を得る．QED

新しい記号を導入して整理しておく．$[A,$ をオペレータと見なして

$$\begin{aligned} ([A,\ )\ B &= [A,B], \\ ([A,\ )^n\ B &= [A,[A,[A,\cdots,[A,B]\cdots]]] \ (n\,\text{回}), \\ e^{[A,}\ B &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{([A,\ )^n}{n!}\ B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[A,[A,[A,\cdots,[A,B]\cdots]]] \end{aligned}$$

とおく．

補題 III $Z=Z(t)$ と書いて

$$\left(\frac{d}{dt}e^Z\right)e^{-Z} = \frac{e^{[Z,}\ -\mathbf{1}}{[Z,}\frac{dZ}{dt} \qquad (3.8)$$

ここに $\mathbf{1}$ は恒等作用素である．

証明 補題 I で右から e^{-Z} を作用させると

$$\left(\frac{d}{dt}e^Z\right)e^{-Z} = \int_0^1 e^{(1-s)Z}\frac{dZ}{dt}e^{sZ}ds \times e^{-Z} = \int_0^1 e^{(1-s)Z}\frac{dZ}{dt}e^{-(1-s)Z}ds$$

となり，積分の中で補題 II が使える．すなわち

$$A \leftrightarrow (1-s)Z\ ; \quad B \leftrightarrow \frac{dZ}{dt}$$

として

$$\left(\frac{d}{dt}e^Z\right)e^{-Z} = \int_0^1 \left\{e^{(1-s)[Z,}\ \frac{dZ}{dt}\right\}ds = \left\{\int_0^1 e^{(1-s)[Z,}\ ds\right\}\frac{dZ}{dt}$$
$$= \left[-\frac{e^{(1-s)[Z,}}{[Z,}\right]_0^1 \frac{dZ}{dt} = \frac{e^{[Z,}\ -\mathbf{1}}{[Z,}\ \frac{dZ}{dt}$$

を得る．QED

後のため式を書き下すと

$$\frac{e^{[Z,}\ -\mathbf{1}}{[Z,}\ \frac{dZ}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{([Z,\ )^{n-1}}{n!}Z'$$
$$= Z' + \frac{1}{2!}[Z,Z'] + \frac{1}{3!}[Z,[Z,Z']] + \cdots \tag{3.9}$$

となる (ただし，$Z' = \frac{dZ}{dt}$).

BCH-公式の証明

$$e^{Z(t)} = e^{tA}e^{tB}$$

を思い起こそう．このとき補題 III より

$$\left(\frac{d}{dt}e^Z\right)e^{-Z} = \frac{e^{[Z,}\ -\mathbf{1}}{[Z,}\ \frac{dZ}{dt}$$

で，他方ライプニッツの規則および補題 II より

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{tB}\right)\right\}\left(e^{tA}e^{tB}\right)^{-1} = \left(Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}\right)e^{-tB}e^{-tA}$$
$$= A + e^{tA}Be^{-tA}$$
$$= A + e^{t[A,}\ B$$

となる．合わせると公式

$$\frac{e^{[Z,}\ -\mathbf{1}}{[Z,}\ \frac{dZ}{dt} = A + e^{t[A,}\ B \tag{3.10}$$

を得る．ここで $Z = Z(t)$ を

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n Z_n = tZ_1 + t^2 Z_2 + t^3 Z_3 + t^4 Z_4 + \cdots \tag{3.11}$$

と展開して上式に代入すると，係数たち $\{Z_n\}$ が

$$Z_1 = A + B \implies Z_2 \implies Z_3 \implies \cdots$$

のように順々に決定される．QED

最初の方 (t^3 まで) を求めてみよう．(3.9) と (3.10) より

$$\begin{aligned} &Z' + \frac{1}{2!}[Z, Z'] + \frac{1}{3!}[Z, [Z, Z']] + \cdots \\ = \ &A + B + t[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \frac{t^3}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \end{aligned}$$

で，(3.11) を用いて左辺を計算すると

$$\begin{aligned} Z' &= Z_1 + 2tZ_2 + 3t^2 Z_3 + 4t^3 Z_4 + \cdots, \\ [Z, Z'] &= t^2[Z_1, Z_2] + 2t^3[Z_1, Z_3] + \cdots, \\ [Z, [Z, Z']] &= t^3[Z_1, [Z_1, Z_2]] + \cdots \end{aligned}$$

となる．これらを上方程式に代入して係数比較をすると

$$\begin{aligned} t^0 &: \quad Z_1 = A + B, \\ t^1 &: \quad 2Z_2 = [A, B], \\ t^2 &: \quad 3Z_3 + \frac{1}{2}[Z_1, Z_2] = \frac{1}{2}[A, [A, B]], \\ t^3 &: \quad 4Z_4 + \frac{1}{2} \times 2[Z_1, Z_3] + \frac{1}{6}[Z_1, [Z_1, Z_2]] = \frac{1}{6}[A, [A, [A, B]]] \end{aligned}$$

を得る．まさに

$$Z_1 \implies Z_2 \implies Z_3 \implies Z_4$$

と決定されていく．解くと

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{1}{2}[A, B], \\
Z_3 &= \frac{1}{12}\{[[A, B], B] + [[B, A], A]\}, \\
Z_4 &= \frac{1}{24}[[[B, A], A], B]
\end{aligned}
$$

となり，(3.5) 式を得る．

練習問題　Z_2, Z_3, Z_4 を導け．

研究問題　Z_5 を求めよ．

BCH-公式ではもっと強いことが言えるのだが(例えば [3], [4] を見よ)，あまり役に立たない．ここで述べた方法で十分である．それよりも以下のことが重要である．

もし BCH-公式で 交換子積 $[A, B]$ が A および B と交換すれば，すなわち

$$[[A, B], A] = O = [[A, B], B]$$

のとき，BCH は

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} = e^{[A,B]/2} e^{A+B}$$

と簡単な形になる．通常これを初等 (elementary) BCH-公式 と呼ぶようだ．これより

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B \tag{3.12}$$

となる．これは量子力学や量子光学で頻繁に出てくる公式で，**disentangling formula** と呼ばれている(訳を知らない．こんな場合に日本語のもどかしさを感じる)．この式からコヒーレント状態（：レーザーに対応する量子状態）の一般論が展開できる．例えば [5] を見よ．しかし今回はページ数の制限のため省略する．

我々の知りたいことは

問題　どのようなときに行列の無限級数である $BCH(A,B)$ がコンパクトに書き下せるのか？

である．非常な難問であるが，A および B がリー環 $so(4)$ の元のときはコンパクトに書き下せるのである．次の節で詳しく示す．

4　$SO(4)$ の場合の厳密公式

公式 (3.5) で行列の無限級数 $BCH(A,B)$ がコンパクトにまとまるのはどのようなときか？　例えば，ガウスの超幾何級数 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$

$$
{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},\quad (\delta)_n\equiv\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)
$$

を考えてみよう．これは一般には無限級数であるが，パラメータ α, β, γ が特殊な値のときコンパクトにまとまる．例えば

$$
{}_2F_1(-\alpha,\beta;\beta;-z)=(1+z)^{\alpha}
$$

のように．

この節で A および B が古典群 $SU(2)$, $SO(3)$ および $SO(4)$ のリー環の元のとき $BCH(A,B)$ が完全に書き下せることを示す [16]．しかし $SO(3)$ の場合は $SU(2)$ とその随伴表現 (adjoint representation) によって得られるので，ページ数の制限のため省略する．

証明は**量子計算**によって開発された手法をベースにするので，読者は自動的に量子計算の雰囲気を楽しむことができる．量子計算全般に関しては [6], [13] を推薦する (読破するのは“骨がおれる”かも)．

以下の準備として群の定義をしておく (知らなくても問題ない)．

定義　集合 G とある演算 $\circ$ があり，$(G,\circ)$ はこの演算のもとで閉じていて，以下の 3 条件

1) 結合則： $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$,

2) 単位元の存在： $1\circ x = x\circ 1 = x$,

3) 逆元の存在： $x\circ x^{-1} = x^{-1}\circ x = 1$

が成り立つとき，G を群という．

要するに，“普通のことが普通にできる”と言っているにすぎない(気にしない，気にしない)．

[コメント]　以前 Y 氏から群の「定義」は「定理」か？と聞かれて答えられなかったことを覚えている．いろいろなことを突き詰めて最終的に群の「定義」に到達したのなら，それは「定理」ではないか？という意味である．読者の意見は？

4.1　ある古典群

ここで以下に必要な古典群の定義を述べる．詳しい性質等は [7] を見よ．

定義　古典群：

$$
\begin{aligned}
U(n) &= \{A \in M(n;\boldsymbol{C}) \mid A^\dagger A = AA^\dagger = E\},\\
SU(n) &= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\},\\
O(n) &= \{A \in M(n;\boldsymbol{R}) \mid A^t A = AA^t = E\},\\
SO(n) &= \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}.
\end{aligned}
$$

ここに t は転置作用素，$\dagger$（ダガー）はエルミート作用素で，各々

$$
A = (a_{ij}) \in M(n;\boldsymbol{R}) \Longrightarrow A^t = (a_{ji}),
$$

$$A = (a_{ij}) \in M(n;\boldsymbol{C}) \implies A^\dagger = (\bar{a}_{ji})$$

と定義される．

これらは群でありかつ多様体であるため古典型リー群（古典群）と呼ばれている．これらのリー群の性質は単位元 E の**接ベクトル空間**（リー環と呼ばれている）で完全に決まる．ここに群であることが効いているのである．

定義　リー環：

$$\begin{aligned} u(n) &= \{X \in M(n;\boldsymbol{C}) \mid X^\dagger = -X\}, \\ su(n) &= \{X \in u(n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}, \\ o(n) &= \{X \in M(n;\boldsymbol{R}) \mid X^t = -X\}, \\ so(n) &= \{X \in o(n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}. \end{aligned}$$

少し説明する．上のリー群を G とおき，そのリー環を小文字の $g = \mathfrak{L}(G)$ で表すとき

$$e^{sX} \in G \quad (X \in g, \quad s \in \boldsymbol{R})$$

が成り立つ．例えば，$X \in so(n)$ のとき $X^t = -X$, $\operatorname{tr} X = 0$ より

$$\begin{aligned} &(e^{sX})^t e^{sX} = e^{sX^t} e^{sX} = e^{-sX} e^{sX} = e^{-sX+sX} = e^O = E, \\ &\det e^{sX} = e^{s \operatorname{tr} X} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

となる．

練習問題　残りの場合をチェックせよ．

以下では $SO(4)$ と $SU(2)$ が中心となる．

4.2 テンソル積

初めにベクトルおよび行列のテンソル積（クロネッカー積）の定義を与えておこう[2)].

$\boldsymbol{C}^2$ の元 a, b を

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と表すと，ベクトルのクロネッカー積 $a \otimes b$ は

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_1 b \\ a_2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

と定義される.

また行列 A, B $\in M(2, \boldsymbol{C})$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

と表すと，行列のクロネッカー積 $A \otimes B$ は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と定義される. これらの基本関係式は

$$(A \otimes B)(a \otimes b) = (Aa) \otimes (Bb) \tag{4.3}$$

---

2) テンソル積：簡単のため $n = 2$ に制限しているが，一般の n でも同様に定義される.

で与えられ，これより行列の積は

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1A_2 \otimes B_1B_2 \tag{4.4}$$

となることがわかる．なぜなら，任意の $a \otimes b$ に対して 定義より

$$\begin{aligned}\{(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\}(a \otimes b) &= (A_1 \otimes B_1)((A_2a) \otimes (B_2b)) \\ &= A_1(A_2a) \otimes B_1(B_2b) = (A_1A_2)a \otimes (B_1B_2)b = (A_1A_2 \otimes B_1B_2)(a \otimes b)\end{aligned}$$

だから．

［コメント］ テンソル積は一見難しそうに見えるが簡単な性質である．2 変数関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

と**変数分離**したことに対応している [12].

いま $U(2) \otimes U(2)$ を

$$U(2) \otimes U(2) = \{A \otimes B \mid A, B \in U(2)\}$$

とおくと，$U(2) \otimes U(2)$ は上の積に関して群（さらにリー群）であることがわかる．その形 (4.2) から $U(2) \otimes U(2) \subset U(4)$ で，$U(2) \otimes U(2)$ と $U(4)$ の間には大きなギャップがある．例えば，量子計算で有名な Controlled NOT gate（行列）

$$C_{NOT} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

は $U(4) \backslash U(2) \otimes U(2)$ の元である（チェックせよ）．

我々は $U(2) \otimes U(2)$ の部分群である

$$SU(2) \otimes SU(2) = \{A \otimes B \mid A, B \in SU(2)\}$$

に興味がある．このとき有名な同型

$$SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4) \tag{4.5}$$

があり(あまり気にしなくてよい)，以下この同型をフル活用するのである．この同型については，例えば [7] を見よ．

最後に後で必要となるテンソル積に関する指数写像の計算をしておく．記号等は下の **4.3** を使う．量子計算では一般に単位元に E を使わないので 1_2 と書く．

$X,\ Y \in M(2; \boldsymbol{C})$ として

$$e^{X\otimes 1_2} = e^X \otimes 1_2, \quad e^{1_2\otimes Y} = 1_2 \otimes e^Y$$

が成り立つ．証明は簡単で

$$e^{X\otimes 1_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X\otimes 1_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X^n \otimes 1_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n\right) \otimes 1_2 = e^X \otimes 1_2$$

だけである(残りも同様)．テンソル積の性質 (4.4) より

$$[X\otimes 1_2, 1_2\otimes Y] = (X\otimes 1_2)(1_2\otimes Y) - (1_2\otimes Y)(X\otimes 1_2) = X\otimes Y - X\otimes Y = O$$

で，$X \otimes 1_2$ と $1_2 \otimes Y$ が交換するので

$$e^{X\otimes 1_2 + 1_2\otimes Y} = e^{X\otimes 1_2}e^{1_2\otimes Y} = \left(e^X \otimes 1_2\right)\left(1_2 \otimes e^Y\right) = e^X \otimes e^Y \tag{4.6}$$

が成り立つ．これはリー環とリー群との対応関係 $\exp : \mathfrak{L}(G\otimes G) \longrightarrow G \otimes G$ を示す．すなわち，

$$\mathfrak{L}(G\otimes G) = \{X\otimes 1_2 + 1_2\otimes Y \mid X, Y \in g = \mathfrak{L}(G)\} \tag{4.7}$$

が成り立つのである．

もう少し詳しく成分で書いてみよう．

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと (4.2) より

$$X \otimes 1_2 + 1_2 \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & y_{12} & x_{12} & 0 \\ y_{21} & x_{11}+y_{22} & 0 & x_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22}+y_{11} & y_{12} \\ 0 & x_{21} & y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

と表せる．

練習問題　チェックせよ．

4.3　マジック行列

この項でマクリン (Makhlin) のいわゆるマジック行列を紹介する [10]．これにより $SO(4)$ のテンソル積 $SU(2) \otimes SU(2)$ への分解が非常に明快になる．マクリンの構成方法はわかりにくいので，我々の方法で紹介する [11], [12].

1 ビットは $\boldsymbol{Z}_2 = \{0, 1\}$ である．その量子版（量子ビット＝キュビット）を定義しよう．$\boldsymbol{C}^2$ の基底をディラック (Dirac) の記号を用いて

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

とおくと，1 キュビット空間は

$$\boldsymbol{C}^2 = \mathrm{Vect}_{\boldsymbol{C}}\{|0\rangle, |1\rangle\} = \{a|0\rangle + b|1\rangle \mid a, b \in \boldsymbol{C}\}$$

と表され，この空間にパウリ (Pauli) のスピン行列 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，すなわち

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

が作用する．単位行列は 1_2 であった．

パウリ行列の基本的性質は

$$\{\sigma_i,\sigma_j\}\ \equiv\ \sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i\ =\ 2\delta_{ij}1_2, \tag{4.11}$$

$$[\sigma_i,\sigma_j]\ \equiv\ \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i\ =\ 2\sqrt{-1}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4.12}$$

で与えられる．普通純虚数は i であるが，添え字との混乱を防ぐためここでは $\sqrt{-1}$ を使った．

練習問題　証明せよ．

このときリー環 $u(2)$ と $su(2)$ は

$$\begin{aligned}u(2)\ &=\ \{i(x_0 1_2+x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3)\mid x_0,x_1,x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\}\\ su(2)\ &=\ \{i(x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3)\mid x_1,x_2,x_3\in\boldsymbol{R}\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

と表される．

$H_0(2;\boldsymbol{C})$ を $M(2;\boldsymbol{C})$ のトレース零のエルミート行列全体とすると

$$\begin{aligned}H_0(2;\boldsymbol{C})\ &=\ \{A\in M(2;\boldsymbol{C})\mid A^\dagger=A,\ \mathrm{tr}\,A=0\}\\ &=\ \{A=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3\mid a_1,a_2,a_3\in\boldsymbol{R}\}\end{aligned} \tag{4.14}$$

となり，同型 $H_0(2;\boldsymbol{C})\cong su(2)$ は明らかであろう．

練習問題　$A\in H_0(2;\boldsymbol{C})$ を

$$A\ =\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M(2;\boldsymbol{C})$$

とおいて $A^\dagger = A$, $\mathrm{tr}\, A = 0$ を解き (4.14) を証明せよ.

次に 2 キュビット空間を考えよう. テンソル積を使うのであるが, 我々が以下で使用する記号は通常のそれとは少し異なる. すなわち,

$$\boldsymbol{C}^2 \otimes \boldsymbol{C}^2 = \{a \otimes b \mid a, b \in \boldsymbol{C}^2\}$$

とおき, $\boldsymbol{C}^2 \hat{\otimes} \boldsymbol{C}^2$ を $\boldsymbol{C}^2 \otimes \boldsymbol{C}^2$ を含む最小のベクトル空間

$$\boldsymbol{C}^2 \hat{\otimes} \boldsymbol{C}^2 = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \otimes b_j \;\middle|\; a_j, b_j \in \boldsymbol{C}^2,\ \lambda_j \in \boldsymbol{C},\ k \in \boldsymbol{N} \right\} \cong \boldsymbol{C}^4$$

とするのである. 簡単のため $|xy\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ $(x, y \in \{0, 1\})$ とおくと, $\boldsymbol{C}^2 \otimes \boldsymbol{C}^2 \ni |xy\rangle$ で (4.1) より計算すると

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. したがって

$$\boldsymbol{C}^2 \hat{\otimes} \boldsymbol{C}^2 = \mathrm{Vect}_{\boldsymbol{C}}\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

と表される.

[コメント] $\boldsymbol{C}^2 \otimes \boldsymbol{C}^2$ の元を non-entangled state と呼び, $\boldsymbol{C}^2 \hat{\otimes} \boldsymbol{C}^2 \backslash \boldsymbol{C}^2 \otimes \boldsymbol{C}^2$ のを entangled state と呼ぶ. 量子力学では, 簡単に作れる non-entangled states を あるハミルトニアンに従って（ユニタリー）時間発展させ複雑な entangled states を作り, それを観測する研究がよくおこなわれている [6].

2 キュビットでは以下に定義されるベル (Bell) 基底 $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle\}$

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad & |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad & |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \end{aligned} \tag{4.15}$$

が重要な役割をする．これを用いるとマクリンの定理を書き下すことができる．

簡単な計算でベル基底は

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_4\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となる．

[コメント]　ベル基底は，数学的には面白くもおかしくもない．しかしこれを量子力学の立場から見ると非常に難しい問題（non-locality の問題）を引き起こす．[6] を見よ．アインシュタイン (Einstein) は量子力学を執拗に攻撃したが，それはこのことが彼の基本思想（locality の原理）と相容れないためである．

マクリンは同型 $SU(2)\otimes SU(2) \cong SO(4)$ を以下のように **adjoint action** の形で与えた：

$$F : SU(2) \otimes SU(2) \longrightarrow SO(4), \quad F(A\otimes B) = R^{\dagger}(A\otimes B)R$$

ここに R はユニタリー行列

$$R \equiv (|\Psi_1\rangle, -i|\Psi_2\rangle, -|\Psi_3\rangle, -i|\Psi_4\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

である．我々の R はマクリンのユニタリー行列 Q とは少し異なることに注意せよ ([11] を見よ)．

求め方は簡単で

$$R \equiv \left(e^{i\theta_1}|\Psi_1\rangle, e^{i\theta_2}|\Psi_2\rangle, e^{i\theta_3}|\Psi_3\rangle, e^{i\theta_4}|\Psi_4\rangle\right) \in U(4)$$

とおき，以下の方程式 (4.17) を満たすように係数たち $\{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, e^{i\theta_4}\}$ を決めればよい．

[コメント] もし誰かが私に同型 $SU(2)\otimes SU(2) \cong SO(4)$ を adjoint action で表してほしいと要求したならば，(たぶん) 一週間以内でマクリンのマジック行列を見つけたと思う[3]．需要のないところに供給もないのである．

もっと詳しく見てみよう．一般に“リー群”より“リー環”で取り扱うほうが楽である．G をリー群，$\mathfrak{L}(G)$ をそのリー環とする．このとき我々は以下の可換図をもつ：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(SU(2)\otimes SU(2)) & \xrightarrow{\ f\ } & \mathfrak{L}(SO(4)) \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ SU(2)\otimes SU(2) & \xrightarrow[\ F\ ]{} & SO(4) \end{array}$$

$SU(2)\otimes SU(2)$ のリー環は，(4.7) より

$$\mathfrak{L}(SU(2)\otimes SU(2)) = \{i(a\otimes 1_2 + 1_2\otimes b) \mid a, b \in H_0(2; \boldsymbol{C})\}$$

なので，f は

$$f(i(a\otimes 1_2 + 1_2\otimes b)) = iR^\dagger(a\otimes 1_2 + 1_2\otimes b)R \in \mathfrak{L}(SO(4)) \equiv so(4) \quad (4.17)$$

と表せる．

これを具体的に書き下すため (4.14) より $a = \sum_{j=1}^{3} a_j\sigma_j$ および $b =$

[3] ロシアの科学者：余計なことを一つ．これはあくまでも一般論である．ロシアの科学者にはときどき想像を越えた人物が出てくる．ランダウなどはその典型例である．しかも論文は，そのことに対応するかのように難解である．彼らの思考回路は，西側の科学者のそれとは違うのではないかと思えるときがある．脳科学者の出番である！

$\sum_{j=1}^{3} b_j\sigma_j$ とおくと，(4.17) の右辺は（簡単な計算で）

$$iR^\dagger(a\otimes 1_2+1_2\otimes b)R = \begin{pmatrix} 0 & a_1+b_1 & a_2-b_2 & a_3+b_3 \\ -(a_1+b_1) & 0 & a_3-b_3 & -(a_2+b_2) \\ -(a_2-b_2) & -(a_3-b_3) & 0 & a_1-b_1 \\ -(a_3+b_3) & a_2+b_2 & -(a_1-b_1) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

となる．

練習問題　証明せよ．

逆に $SO(4)$ のリー環は

$$\mathfrak{L}(SO(4)) = \{A \in M(4;\boldsymbol{R}) \mid A^t = -A\}$$

なので

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ -f_{12} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ -f_{13} & -f_{23} & 0 & f_{34} \\ -f_{14} & -f_{24} & -f_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$f^{-1}(A) = RAR^\dagger = i(a\otimes 1_2 + 1_2\otimes b) \tag{4.19}$$

は（簡単な計算で）

$$\begin{aligned} a &= a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \\ &= \frac{f_{12}+f_{34}}{2}\sigma_1 + \frac{f_{13}-f_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{f_{14}+f_{23}}{2}\sigma_3, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} b &= b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3 \\ &= \frac{f_{12}-f_{34}}{2}\sigma_1 - \frac{f_{13}+f_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{f_{14}-f_{23}}{2}\sigma_3 \end{aligned} \tag{4.21}$$

となる.

練習問題　証明せよ.

[コメント]　非常に面白いことに，a は self-dual part で b は anti-self-dual part である．このことよりマジック行列は ヤン - ミルズ (Yang-Mills) 理論と深い関係をもつことがわかるが，残念ながらスペースの関係上省略する．[17] を見よ.

4.4　$SU(2)$ の場合

この項で $SU(2)$ の場合に $BCH(A,B)$ が完全に書き下せることを示す.

最初によく知られた公式を書く：

$$e^{i(x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3)} = \cos r 1_2 + \frac{\sin r}{r} i(x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3) \tag{4.22}$$

ここに $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である．簡単な演習問題である．これはまさにオイラーの公式 (2.5) の行列版である.

練習問題　証明せよ.（**ヒント**：

$$X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$$

とおき，X^2 を計算すること．そして

$$e^{iX} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} X^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} X^{2m+1}$$

と分解せよ.）

3 次元ではリー環の言葉をベクトル解析の言葉にするとわかりやすいので，公式を書く前に数学の準備をする.

$$X = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3, \quad Y = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + y_3\sigma_3 \in H_0(2, \boldsymbol{C})$$

に対して対応 $H_0(2, \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ は

$$X \longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y \longrightarrow \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

で,

$$-\frac{i}{2}[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)\sigma_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\sigma_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\sigma_3$$

より

$$-\frac{i}{2}[X, Y] \longrightarrow \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

である．内積やノルムを

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}, \quad |\boldsymbol{y}| = \sqrt{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}}$$

とおく．

以上の準備のもとで以下の公式を得る．

補助公式

$$\mathrm{e}^{iX}\mathrm{e}^{iY} = \mathrm{e}^{iZ} \ ; \quad Z = \alpha X + \beta Y + \gamma \frac{i}{2}[X, Y] \tag{4.23}$$

ここに（簡単のため）

$$\begin{aligned} \alpha \equiv \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}, \\ \beta \equiv \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}, \\ \gamma \equiv \gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{\sin^{-1}\rho}{\rho} \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} \end{aligned} \tag{4.24}$$

で，かつ

$$\rho^2 \equiv \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2 = \sin^2|\boldsymbol{x}|\cos^2|\boldsymbol{y}| + \sin^2|\boldsymbol{y}| - \frac{\sin^2|\boldsymbol{x}|\sin^2|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 + \frac{2\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$$

である．

証明　公式 (4.22) とパウリ行列の性質より

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{iX}\mathrm{e}^{iY} &= \left\{\cos|\boldsymbol{x}|1_2 + i\frac{\sin|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|}(x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3)\right\}\times \\
&\quad \left\{\cos|\boldsymbol{y}|1_2 + i\frac{\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}(y_1\sigma_1+y_2\sigma_2+y_3\sigma_3)\right\} \\
&= \left\{\cos|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}| - \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\right\}1_2 + \\
&\quad i\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}(x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3) + \\
&\quad i\frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}(y_1\sigma_1+y_2\sigma_2+y_3\sigma_3) - \\
&\quad i\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\{(x_2y_3-x_3y_2)\sigma_1 + (x_3y_1-x_1y_3)\sigma_2 + (x_1y_2-x_2y_1)\sigma_3\} \\
&= \left\{\cos|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}| - \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\right\}1_2 + \\
&\quad i\left\{\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}X + \frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}Y + \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\frac{i}{2}[X,Y]\right\}
\end{aligned}$$

を得る．他方再び (4.22) より

$$\mathrm{e}^{iZ} = \cos|\boldsymbol{z}|1_2 + i\frac{\sin|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}|}Z; \quad Z = z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3$$

で，係数比較すると

$$\begin{aligned}
\cos|\boldsymbol{z}| &= \cos|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}| - \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}, \\
\frac{\sin|\boldsymbol{z}|}{|\boldsymbol{z}|}Z &= \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}X + \frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}Y + \frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\frac{i}{2}[X,Y]
\end{aligned}$$

である．ここで $\cos|z|$ を消去して $\sin|z|$ に統一する．

$$
\begin{aligned}
\sin^2|z| &= 1-\cos^2|z| \\
&= 1-\left(\cos|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|-\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\right)^2 \\
&= 1-\cos^2|\boldsymbol{x}|\cos^2|\boldsymbol{y}|+\frac{2\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}- \\
&\quad \frac{\sin^2|\boldsymbol{x}|\sin^2|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \\
&= \sin^2|\boldsymbol{x}|\cos^2|\boldsymbol{y}|+\sin^2|\boldsymbol{y}|-\frac{\sin^2|\boldsymbol{x}|\sin^2|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2+ \\
&\quad \frac{2\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \\
&\equiv \rho^2
\end{aligned}
$$

より

$$
\sin^2|z|=\rho^2 \;\Rightarrow\; \sin|z|=\rho \;\Rightarrow\; |z|=\sin^{-1}(\rho)
$$

なので，目的の

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{|z|}{\sin|z|}\left(\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}X+\frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}Y+\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\frac{i}{2}[X,Y]\right) \\
&= \frac{\sin^{-1}(\rho)}{\rho}\left(\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\cos|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}|}X+\frac{\cos|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{y}|}Y+\frac{\sin|\boldsymbol{x}|\sin|\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\frac{i}{2}[X,Y]\right) \\
&\equiv \alpha X+\beta Y+\gamma\frac{i}{2}[X,Y]
\end{aligned}
$$

を得る．QED

この結果は別に新しいものではない．例えば [14] を見よ．また [15] に $SO(3)$ の場合の公式が述べられているが，表現 $Ad: SU(2)\longrightarrow SO(3)$（例えば [11] および下のノートを見よ）を用いれば $SU(2)$ の結果から簡単にわかる（正確には，専門家なら簡単にわかる）．

ノート　本文とは直接関係はないが，重要なことをノートしておく．(4.22) の右辺を書き下すと

$$e^{i(x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3)} = \begin{pmatrix} \cos r+\frac{\sin r}{r}(iz) & \frac{\sin r}{r}(y+ix) \\ \frac{\sin r}{r}(-y+ix) & \cos r-\frac{\sin r}{r}(iz) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

で，簡単な計算で

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

がわかる．すなわち，ベクトル $(\alpha,\beta)^t$ は 3 次元球面 S^3 の（複素）座標である．ここに S^3 は

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(a,b,c,d)^t \in \boldsymbol{R}^4 \mid a^2+b^2+c^2+d^2=1\} \\ &= \{(\alpha,\beta)^t=(a+ib,\ c+id)^t \in \boldsymbol{C}^2 \mid |\alpha|^2+|\beta|^2=1\} \end{aligned}$$

で定義される．

他方，群 $SU(2)$ は

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle|\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \right\}$$

と表せることが知られている，例えば [7] を見よ(各自証明を試みよ)．したがって対応

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$$

により，位相空間としての同相 $S^3 \cong SU(2)$ が得られる．$SU(2)$ は位相的には球面にすぎず，非常に special なのである．

また群としての完全系列 (exact sequence)

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{Z}_2 \longrightarrow SU(2) \xrightarrow{Ad} SO(3) \longrightarrow 1$$

が成り立つ．完全系列については [7] を見よ．この表現 Ad は

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix} \quad (a^2+b^2+c^2+d^2=1)$$

に対して

$$Ad(U) = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2+d^2 & 2(ab-cd) & 2(ac+bd) \\ -2(ab+cd) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(ad-bc) \\ -2(ac-bd) & -2(ad+bc) & a^2+b^2-c^2-d^2 \end{pmatrix}$$

と表せる．これより Ad は明らかに

$$Ad(-U) = Ad(U) \quad \text{for} \quad U \in SU(2)$$

を満たす．このことが上の完全系列で $\boldsymbol{Z}_2 = \{-1, 1\}$ が顔を出した理由である．

この写像は比較的簡単な形をしているが，結構使い道が多いのである(数学の中には重厚な形をしているが，ほとんど使い物にならない公式が $\cdots$)．しかし以後の展開に直接関係がないので省略する．

4.5　$SO(4)$ の場合

この項で $SO(4)$ の場合に前項の結果を用いて $BCH(A,B)$ が完全に書き下せることを示す [16]．以下記号の混乱を防ぐため $SO(4)$ の単位元を $\mathbf{I}$, $M(2,\boldsymbol{C})$ の単位元を $\mathbf{1}$ と書く．

$A, B \in so(4) \equiv \mathfrak{L}(SO(4))$ は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ -f_{12} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ -f_{13} & -f_{23} & 0 & f_{34} \\ -f_{14} & -f_{24} & -f_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ -g_{12} & 0 & g_{23} & g_{24} \\ -g_{13} & -g_{23} & 0 & g_{34} \\ -g_{14} & -g_{24} & -g_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

と表されるので，**4.3** および **4.4** の結果より

$$RAR^{\dagger} = i(\boldsymbol{a}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{a}_2), \quad RBR^{\dagger} = i(\boldsymbol{b}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{b}_2)$$

かつ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= \frac{f_{12}+f_{34}}{2}\sigma_1 + \frac{f_{13}-f_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{f_{14}+f_{23}}{2}\sigma_3, \\
\boldsymbol{a}_2 &= \frac{f_{12}-f_{34}}{2}\sigma_1 - \frac{f_{13}+f_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{f_{14}-f_{23}}{2}\sigma_3, \\
\boldsymbol{b}_1 &= \frac{g_{12}+g_{34}}{2}\sigma_1 + \frac{g_{13}-g_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{g_{14}+g_{23}}{2}\sigma_3, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \frac{g_{12}-g_{34}}{2}\sigma_1 - \frac{g_{13}+g_{24}}{2}\sigma_2 + \frac{g_{14}-g_{23}}{2}\sigma_3
\end{aligned}$$

かつ

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{f_{12}+f_{34}}{2} \\ \frac{f_{13}-f_{24}}{2} \\ \frac{f_{14}+f_{23}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{f_{12}-f_{34}}{2} \\ -\frac{f_{13}+f_{24}}{2} \\ \frac{f_{14}-f_{23}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{g_{12}+g_{34}}{2} \\ \frac{g_{13}-g_{24}}{2} \\ \frac{g_{14}+g_{23}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{g_{12}-g_{34}}{2} \\ -\frac{g_{13}+g_{24}}{2} \\ \frac{g_{14}-g_{23}}{2} \end{pmatrix},$$

かつ

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha(\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_1), \quad \beta_1 = \beta(\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_1), \quad \gamma_1 = \gamma(\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_1), \\
\alpha_2 &= \alpha(\vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_2), \quad \beta_2 = \beta(\vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_2), \quad \gamma_2 = \gamma(\vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_2)
\end{aligned}$$

となる．このとき $R^{\dagger}R = \mathbf{I} \Leftrightarrow R^{\dagger} = R^{-1}$ および

$$Re^{X}R^{-1} = e^{RXR^{-1}}, \quad R^{-1}e^{X}R = e^{R^{-1}XR}$$

に注意して（指数関数の定義 (2.6) に戻ってチェックせよ）

$$
\begin{aligned}
e^A e^B &= \mathbf{I} e^A \mathbf{I} e^B \mathbf{I} \\
&= R^\dagger R e^A R^\dagger R e^B R^\dagger R \\
&= R^\dagger e^{RAR^\dagger} e^{RBR^\dagger} R \\
&= R^\dagger e^{i(\boldsymbol{a}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{a}_2)} e^{i(\boldsymbol{b}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \boldsymbol{b}_2)} R \\
&= R^\dagger \left(e^{i\boldsymbol{a}_1} \otimes e^{i\boldsymbol{a}_2} \right) \left(e^{i\boldsymbol{b}_1} \otimes e^{i\boldsymbol{b}_2} \right) R \\
&= R^\dagger \left(e^{i\boldsymbol{a}_1} e^{i\boldsymbol{b}_1} \right) \otimes \left(e^{i\boldsymbol{a}_2} e^{i\boldsymbol{b}_2} \right) R \\
&= R^\dagger e^{i(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \gamma_1 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1])} \otimes e^{i(\alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \gamma_2 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2])} R \\
&= R^\dagger e^{i\left\{(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \gamma_1 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (\alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \gamma_2 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2])\right\}} R \\
&= e^{iR^\dagger \left\{(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \gamma_1 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (\alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \gamma_2 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2])\right\} R} \\
&= e^{BCH(A,B)} \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

となり，$BCH(A,B) \in so(4)$ を

$$
\begin{aligned}
BCH(A,B) &= iR^\dagger \left\{ \left(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \gamma_1 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1] \right) \otimes \mathbf{1} \right. \\
&\qquad \left. + \mathbf{1} \otimes \left(\alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \gamma_2 \frac{i}{2}[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2] \right) \right\} R \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ -(12) & 0 & (23) & (24) \\ -(13) & -(23) & 0 & (34) \\ -(14) & -(24) & -(34) & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

と表すと，各成分は（比較的簡単な計算で）

$$
\begin{aligned}
&(12) = \\
&\alpha_1 \frac{f_{12}+f_{34}}{2} + \beta_1 \frac{g_{12}+g_{34}}{2} - \gamma_1 \left(\frac{f_{13}-f_{24}}{2} \frac{g_{14}+g_{23}}{2} - \frac{f_{14}+f_{23}}{2} \frac{g_{13}-g_{24}}{2} \right) + \\
&\alpha_2 \frac{f_{12}-f_{34}}{2} + \beta_2 \frac{g_{12}-g_{34}}{2} - \gamma_2 \left(-\frac{f_{13}+f_{24}}{2} \frac{g_{14}-g_{23}}{2} + \frac{f_{14}-f_{23}}{2} \frac{g_{13}+g_{24}}{2} \right),
\end{aligned}
$$

$$(13) =$$
$$\alpha_1 \frac{f_{13}-f_{24}}{2} + \beta_1 \frac{g_{13}-g_{24}}{2} - \gamma_1 \left(\frac{f_{14}+f_{23}}{2} \frac{g_{12}+g_{34}}{2} - \frac{f_{12}+f_{34}}{2} \frac{g_{14}+g_{23}}{2} \right) +$$
$$\alpha_2 \frac{f_{13}+f_{24}}{2} + \beta_2 \frac{g_{13}+g_{24}}{2} - \gamma_2 \left(-\frac{f_{14}-f_{23}}{2} \frac{g_{12}-g_{34}}{2} + \frac{f_{12}-f_{34}}{2} \frac{g_{14}-g_{23}}{2} \right),$$
$$(14) =$$
$$\alpha_1 \frac{f_{14}+f_{23}}{2} + \beta_1 \frac{g_{14}+g_{23}}{2} - \gamma_1 \left(\frac{f_{12}+f_{34}}{2} \frac{g_{13}-g_{24}}{2} - \frac{f_{13}-f_{24}}{2} \frac{g_{12}+g_{34}}{2} \right) +$$
$$\alpha_2 \frac{f_{14}-f_{23}}{2} + \beta_2 \frac{g_{14}-g_{23}}{2} - \gamma_2 \left(-\frac{f_{12}-f_{34}}{2} \frac{g_{13}+g_{24}}{2} + \frac{f_{13}+f_{24}}{2} \frac{g_{12}-g_{34}}{2} \right),$$
$$(23) =$$
$$\alpha_1 \frac{f_{14}+f_{23}}{2} + \beta_1 \frac{g_{14}+g_{23}}{2} - \gamma_1 \left(\frac{f_{12}+f_{34}}{2} \frac{g_{13}-g_{24}}{2} - \frac{f_{13}-f_{24}}{2} \frac{g_{12}+g_{34}}{2} \right)$$
$$- \alpha_2 \frac{f_{14}-f_{23}}{2} - \beta_2 \frac{g_{14}-g_{23}}{2} + \gamma_2 \left(-\frac{f_{12}-f_{34}}{2} \frac{g_{13}+g_{24}}{2} + \frac{f_{13}+f_{24}}{2} \frac{g_{12}-g_{34}}{2} \right),$$
$$(24) =$$
$$- \alpha_1 \frac{f_{13}-f_{24}}{2} - \beta_1 \frac{g_{13}-g_{24}}{2} + \gamma_1 \left(\frac{f_{14}+f_{23}}{2} \frac{g_{12}+g_{34}}{2} - \frac{f_{12}+f_{34}}{2} \frac{g_{14}+g_{23}}{2} \right) +$$
$$\alpha_2 \frac{f_{13}+f_{24}}{2} + \beta_2 \frac{g_{13}+g_{24}}{2} - \gamma_2 \left(-\frac{f_{14}-f_{23}}{2} \frac{g_{12}-g_{34}}{2} + \frac{f_{12}-f_{34}}{2} \frac{g_{14}-g_{23}}{2} \right),$$
$$(34) =$$
$$\alpha_1 \frac{f_{12}+f_{34}}{2} + \beta_1 \frac{g_{12}+g_{34}}{2} - \gamma_1 \left(\frac{f_{13}-f_{24}}{2} \frac{g_{14}+g_{23}}{2} - \frac{f_{14}+f_{23}}{2} \frac{g_{13}-g_{24}}{2} \right)$$
$$- \alpha_2 \frac{f_{12}-f_{34}}{2} - \beta_2 \frac{g_{12}-g_{34}}{2} + \gamma_2 \left(-\frac{f_{13}+f_{24}}{2} \frac{g_{14}-g_{23}}{2} + \frac{f_{14}-f_{23}}{2} \frac{g_{13}+g_{24}}{2} \right)$$

となる.

練習問題　証明せよ.

これが我々の結果である．何か深いものを暗示していると思うが，現時点では読みきれない．もう少し時間が必要である.

我々が知る限りこの結果はBCH-項を完全にまとめ上げた最初の**非自明**な例であり，ハウスドルフの論文 [8] からちょうど101年目の快挙（!）である．悲しみの数学者ハウスドルフへの追悼を込めて.

5　おわりに

この小論でベーカー - キャンベル - ハウスドルフの公式を再考し，その級数がコンパクトに書き下せる場合を取り扱った．それは小さい群である $SU(2), SO(3), SO(4)$ と初等 BCH-公式が関係する量子力学，量子光学の場合であった(今回は省略)．何となくではあるが「美しい」または「調和がとれている」と感じるのは私だけであろうか？ 読者の声を聞きたいものである．

私も 50 代の後半に入り，遠くの方に「定年」という看板が見え始めた．その影響か，最近ときどき昔を思い出し，考えることがある(昔はよかった！とは書かないつもりである，それでも・・・．[18] を見よ)．そのことを "学問的" に書くので気楽に読んでいただきたい．

微分方程式はその初期値を与えれば解は一意的に定まる．しかし非線形系ではやっかいなことが起こる．初期値がほんの少しずれるだけで，ある時間後，解の値が全く異なってしまうことである．

空気の流れはナビア - ストークス方程式によって支配されるが，非線形方程式のため初期値に sensitive になる．ある地点の風速を完全に測定することは無理で(誤差がある)，天気の長期予報が当たらないのは主にこのためである(予報官の能力は問題にしていない)．

人生も間違いなく非線形系である．もちろん，人生を決定する方程式系は知られていないが，ある時期の行動のわずかな違いが人生を決定的に異なったものにするのである．学生時代の先生，ゼミの教科書，友だち，さらに大学院時代の研究課題等である．

例えば，小林・益川論文を見てみよう [19]．6 ページの論文で，内容は 5 ページが クオークの 2 世代モデルでは CP の破れと consistent でないことを証明し，残り 1 ページが 3 世代モデルにすると CP の破れと consistent であると主張した短い論文である．

読んでみると「たったこれだけ！」と思うかも知れない．しかしこれが彼らを 35 年後飛行機の first class でストックホルムへ連れて行くことになるのである．

この論文は発表後数年はほとんど見捨てられていたそうだ．当時この論文よりも "high level" な論文を書いていた若い研究者は多くいたに違いない(彼らは，小林・益川両氏のノーベル賞受賞をどのような気持ちで見ていたのだろうか？)．

しかし（当時ではわからない）わずかの違いが，後の人生を決定的に異なったものにしてしまった．個人の能力も重要だが，（名古屋大学の坂田研究室がそうであったように）個人の所属する「場」がより重要なのかも知れない．研究者の「初期値」に深い影響を与えるから．

なんともシビアであるが，これが人生なのでしょう(C'est la vie)．しかし，天才バカボンのパパがいつも言ってるように「これでいいのだ」と．

最後に私事を書かせていただく．私は山登りを趣味としており，最も好きな山は南アルプスの北端にある甲斐駒ヶ岳（愛称 カイコマ）である．北岳とともに南アルプスを代表するピラミッド型の男性的な山である．カイコマには，日本百名山で有名な作家深田久弥が「日本アルプスで一番つらい登り」と書いた黒戸尾根ルートがある．読者にも一度登ることを薦めたい．自分をもう一度見直すためにも．

参考文献

[1] 横田一郎・佐倉直男・味木 博：ベクトルと行列，現代数学社，1984.

[2] 大森英樹：幾何学への新しい視点——不確定性と非可換時空——，遊星社，2008.

[3] V.S. Varadarajan : *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer, 1984.

[4] 山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門，新数学シリーズ 18，培風館，1960.

[5] J. R. Klauder and Bo-S. Skagerstam (Eds) : *Coherent States*, World Scientific, Singapore, 1985.

[6] 細谷暁夫：量子コンピュータの基礎，ＳＧＣライブラリ－４，サイエンス社，1999.

[7] 横田一郎：群と位相，基礎数学選書，裳華房，1971.

[8] F. Hausdorff : Die symbolische Exponential Formel in der Gruppen theorie, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig.* **58** (1906), 19–48.
正直に書くと，この論文を見たことがない.

[9] C. Zachos : Crib Notes on Campbell-Baker-Hausdorff expansions, unpublished, 1999, see http://www.hep.anl.gov/czachos/index.html.

[10] Y. Makhlin : Nonlocal properties of two-qubit gates and mixed states and optimization of quantum computations, *Quant. Info. Proc.* **1** (2002), 243, quant-ph/0002045.

[11] K. Fujii, H. Oike and T. Suzuki : More on the isomorphism $SU(2)\otimes SU(2) \cong SO(4)$, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** (2007), 471, quant-ph/0608186.

[12] 藤井一幸：量子計算とマジック行列，数理科学 "代数的物理観"，2007 年 7 月号，30–35，サイエンス社.

[13] K. Fujii : Introduction to Grassmann Manifolds and Quantum Computation, *J. Applied Math.* **2** (2002), 371, quant-ph/0103011.

[14] S. Weigert : Baker-Campbell-Hausdorff relation for special unitary groups $SU(N)$, *J. Phys.* A **30** (1997), 8739, quant-ph/9710024.

[15] K. Engo : On the BCH-formula $so(3)$, Reports in Informatics, No. 201 (2000), Department of Informatics, University of Bergen.

[16] K. Fujii and T. Suzuki : On the magic matrix by Makhlin and the B-C-H formula in $SO(4)$, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4** (2007), 897, quant-ph/0610009.

[17] K. Fujii, H. Oike and T. Suzuki : Universal Yang-Mills Action on Four Dimensional Manifolds, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **3** (2006), 1331, hep-th/0602204.

[18] 吉岡直人：「さらば，公立大学法人 横浜市立大学」，自費出版，2009.
私の所属する横浜市立大学の大学「改革」の記録であり，大学改革とは何かを考えるためのテキストである．

[19] M. Kobayashi and T. Maskawa : CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973), 652.

[20] C. Jarlskog : Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Nonconservation, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985), 1039.

[21] K. Fujii : A Geometric Parametrization of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix and the Jarlskog Invariant, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **6** (2009), 1057, quant-ph/0901.2180.
大論文の後に小論文をリストして申し訳ないが，CP-violation measure には異論がある．

非可換ワールドへの招待

準行列式の話

鈴木 達夫

概 要

線形代数において，行列式の概念は必要不可欠なものである．そして，通常の行列式は成分が可換な元からなる行列に対して定義されている．しかし最近では，数学や数理物理のさまざまな場面で非可換成分行列の線形代数が必要となっている．そこで扱われているものは，例えば四元数行列の場合，Study 行列式，Moore 行列式，$\cdots$，不変式論では Capelli 行列式，$\cdots$，数理物理では超行列式，量子行列式など，各対象ごとにさまざまな非可換行列式が研究されている．このような状況のもと，それらを統一的に扱うものとして 1991 年に I.M. Gelfand と V.S. Retakh によって導入された**準行列式 (quasideterminant)** がある．

前半では準行列式について，線形代数におけるブロック分けの計算を手がかりに詳しく解説する．準行列式に関して，具体的な計算を豊富に記述した類書は今までないと思う．

後半では，準行列式の概念を利用して，線形代数におけるスペクトル分解理論の非可換版を解説する．この理論では，新たに非可換ラグランジュ補間式を定義し，Gelfand たちの非可換ケーリー - ハミルトンの定理と合わせることにより，成分が非可換な行列に対しても，行列の関数を決まった手続きで計算することができる．例として四元数を成分にもつ行列の非可換スペクトル分解を与え，さらにその指数行列を計算する．

1　はじめに

数学を学んでいると，バラバラに見えていたものが，ある考え方をきっかけに統一的に見えてくることがある．線形代数では線形性に注目することで，数列の漸化式も微分方程式も全く同様の手続きで解けることに感動する．

一方，行列式は行列が正則かどうかを判定し，さまざまな応用をもつ重要な概念である．人類の英知が詰まっていると言っても過言ではない．その行列式の計算ルールは，各成分が可換 ($ab = ba$) であることを前提に作られている．しかし最近では，現代のハイテクを支える量子力学との関連から，各成分が非可換 ($ab \neq ba$) の行列を使う必要性が生じてきた．そこでも行列式という強力な道具を使おうとすれば，各成分に「良い」順番をつけて定義し用いることになる．その結果，さまざまな「非可換行列式」が登場している．それらを統一的に扱うために開発された概念が，I.M. Gelfand と V.S. Retakh によって導入された準行列式 (quasideterminant) である．この新しい道具と，それによってもたらされる感動を，読者の皆さんにもぜひ味わってもらいたいと思う．

2　行列と行列式

まず最初に，行列の積の性質について復習しておく．例えば，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，積 AB と BA をそれぞれ計算すると，

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-2 \\ 2+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2+1 \\ 1+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので $AB \neq BA$ である（積の順序を入れ替えると結果が違ってくる）．このとき A と B は**非可換**であるという．

また，行列の積 AB の逆行列は

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

となることも注意する．この計算はこれから頻繁に利用する．

次に行列式についても復習しておく．

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式**（**determinant**，**ディターミナント**）は

$$\det A = |A| = ad - bc \tag{2.1}$$

で定義され，3 次以上の正方行列に対しても帰納的に定義される．例えば 2 次の行列式を使って 3 次の行列式を定義するには，1 行目に関する**余因子展開**（または**ラプラス展開**）を用いて

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

とすればよい．大切なことは，行列式を定義する行列の成分は通常 すべて可換 であることである．もし成分が非可換な場合，それぞれの代数に応じた特別な定義をする必要がある．

正方行列 X, Y に対して，行列式の積公式

$$\det(XY) = \det X \cdot \det Y \tag{2.3}$$

が成り立つことも注意しておく．

また，よく知られているように行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆行列は，

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

ここで $\tilde{a}_{ij}$ は A の (i,j) **余因子**で，2 次のときは

$$\tilde{a}_{11}=a_{22},\quad \tilde{a}_{21}=-a_{12},\quad \tilde{a}_{12}=-a_{21}\quad \tilde{a}_{22}=a_{11} \tag{2.5}$$

である．

3　行列のブロック分けと非可換はき出し法

大きなサイズの行列はうまくブロック分けして計算するのが便利である．例えば，

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の積 XY を計算する場合，X, Y を次のようにブロック分けする．まず，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき，

$$X=\begin{pmatrix} A & E \\ O & E \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} B & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

とブロック分けすれば,

$$XY = \begin{pmatrix} A & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB + E\cdot O & A\cdot O + E^2 \\ O\cdot B + E\cdot O & O^2 + E^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} AB & E \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ただし, $AB \neq BA$ なので XY の $(1,1)$ ブロックを BA としてしまうと間違った答えとなる. このように, **積の順序さえ守れば**, 行列 A, B, E, O たちが**あたかも一つの数のように**計算できるのが利点である.

ここで, 一般の行列 X を, 下記のように 2×2 の形にブロック分けする. ただし, A は正方行列で, 逆行列をもつとする. 通常のはき出し法の手順をブロック分けのまま実行してみよう. 積の順番に気をつけることだけが注意点である.

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{(1 行目に左から } A^{-1} \text{ を掛ける)} \qquad (3.1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \quad \text{(2 行目から 1 行目の左 } C \text{ 倍を引く)} \qquad (3.2)$$

この $(2,2)$ ブロックに出てきた形が今回の非可換ワールドの主人公, **$(2,2)$-準行列式**（**quasideterminant**, **クェサイ・ディターミナント**）である. これを

$$|X|_{22} = D - CA^{-1}B \qquad (3.3)$$

と書く．

いまのはき出し法の手順を行列の積で書いてみよう．(3.1) の操作は

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

さらに (3.2) の操作は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E & O \\ -C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} E & O \\ -C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} =: Y \end{aligned} \quad (3.4)$$

であり，

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O \\ -C & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix}$$

であるので (3.4) より，

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ C & E \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} A & O \\ C & E \end{pmatrix} Y \\ &= \begin{pmatrix} A & O \\ C & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，公式 (2.3) より，

$$\begin{aligned} \det X &= \det\begin{pmatrix} A & O \\ C & E \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \\ &= \det A \cdot \det(D-CA^{-1}B). \end{aligned} \quad (3.5)$$

注意 1 行列 X の各ブロックを「非可換な数」と考えると，行列 X の 1 次**主小行列** (principal minor) [1] X_1 は A で，行列 X_1 の $(1,1)$-準行列式は A そのものである．すなわち

$$|X_1|_{11} = A.$$

また，X の 2 次主小行列 X_2 は X そのものであり，

$$|X_2|_{22} = |X|_{22} = D - CA^{-1}B.$$

A がもし 1 行 1 列の行列（普通の数）a なら $\det a = a$ であるから，式 (3.5) をその感覚で見れば，

n 次の**行列式**は k 次主小行列の (k,k)-**準行列式の積**に分解される

$$|X| = |X_1|_{11}|X_2|_{22}\cdots|X_n|_{nn}$$

と言ってよい．実際，超行列式や量子行列式など多くの非可換行列式はこのように分解される [8].

---

1) 一般に n 次正方行列 A から最初の k 行と最初の k 列を抜き出して作る行列 A_k を k 次の主小行列，その行列式 $|A_k|$ を k 次の主小行列式という．例えば 3 次正方行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ に対し，

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = A$$

であり，次の関係が大切である．

$$|A| = |A_1| \cdot \frac{|A_2|}{|A_1|} \cdot \frac{|A_3|}{|A_2|}.$$

4　準行列式と行列式

前節で (2,2)-準行列式を定義したが，準行列式は行列の各成分を一つ指定することごとに定まる．一般の定義は後回しにして，2 行 2 列で見てみよう．$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し，(1,1)-準行列式は次のように定義される．

$$|A|_{11} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & \rightarrow & \\ & & \downarrow \\ & \leftarrow & \end{array}$$

A の成分が 非可換 な場合，積の順番が大切である．同様に，(1,2)-準行列式などは，

$$|A|_{12} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22}, \qquad \begin{array}{ccc} & \leftarrow & a_{12} \\ \downarrow & & \\ & \rightarrow & \end{array}$$

$$|A|_{21} = a_{21} - a_{22}a_{12}^{-1}a_{11}, \qquad \begin{array}{ccc} & \leftarrow & \\ & & \uparrow \\ a_{21} & \rightarrow & \end{array}$$

$$|A|_{22} = a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}. \qquad \begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ \uparrow & & \\ & \leftarrow & a_{22} \end{array}$$

これら四つの準行列式が，いつもの行列式とどのような関係にあるかを見るために，A の成分が 可換 な場合を考えよう．この場合は積の順序を入れ替えてよいので，

$$|A|_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}} = \frac{\det A}{\tilde{a}_{11}}, \tag{4.1}$$

$$|A|_{12} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{-a_{21}} = \frac{\det A}{\tilde{a}_{12}}, \tag{4.2}$$

$$|A|_{21} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{-a_{12}} = \frac{\det A}{\tilde{a}_{21}}, \tag{4.3}$$

$$|A|_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} = \frac{\det A}{\tilde{a}_{22}}. \tag{4.4}$$

これらの例からもわかるように，準行列式は行列式そのものの非可換化ではなく，

行列式を余因子で割ったもの の非可換化

である，つまり成分が可換なときは，

$$|A|_{ij} = \frac{\det A}{\tilde{a}_{ij}} \tag{4.5}$$

となる．

実は，成分が 非可換でも 次の定理が成り立つ．

定理 1　2 次正方行列 A の逆行列が存在するとき，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} |A|_{11}^{-1} & |A|_{21}^{-1} \\ |A|_{12}^{-1} & |A|_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

上の 4 本の式 (4.1) から (4.4) および有名な逆行列の公式 (2.4) と (4.6) を見比べてほしい．n 次正方行列に対しても同様の定理が成り立つので，A の (i,j)-準行列式は

A^{-1} の (j,i) 成分の逆数

と定義することもできる．

〔**例 1**〕 例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}
|A|_{11}^{-1} &= (1 - 2\cdot 4^{-1}\cdot 3)^{-1} = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^{-1} = -2,\\
|A|_{21}^{-1} &= (3 - 4\cdot 2^{-1}\cdot 1)^{-1} = (3-2)^{-1} = 1,\\
|A|_{12}^{-1} &= (2 - 1\cdot 3^{-1}\cdot 4)^{-1} = \left(2 - \frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2},\\
|A|_{22}^{-1} &= (4 - 3\cdot 1^{-1}\cdot 2)^{-1} = (4-6)^{-1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

よって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

上記の例では，通常の逆行列の公式どおりでつまらないと思うかもしれない．次の例では，非可換な代数として**四元数**を取り上げる．四元数とは複素数の拡張であり，

$$q = q_0 1 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (q_0, q_1, q_2, q_3 \text{ は実数})$$

という形の数で，i, j, k たちは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (4.7)$$

という規則を満たすものである．四元数は数学や物理のさまざまな場面で役に立つ数であるが，規則 (4.7) によって積は非可換である．この四元数を成分にもつ行列の逆行列は，公式 (2.4) では求まらないが，準行列式を用いた逆行列の公式 (4.6) を用いれば簡単に求まるのである．

〔例 2〕 四元数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}
|A|_{11}^{-1} &= (1 - i \cdot k^{-1} j)^{-1} = (1 + ikj)^{-1} = \frac{1}{2}, \\
|A|_{21}^{-1} &= (j - k \cdot i^{-1} 1)^{-1} = (j + ki)^{-1} = (2j)^{-1} = -\frac{j}{2}, \\
|A|_{12}^{-1} &= (i - 1 \cdot j^{-1} k)^{-1} = (i + jk)^{-1} = (2i)^{-1} = -\frac{i}{2}, \\
|A|_{22}^{-1} &= (k - j \cdot 1^{-1} i)^{-1} = (k - ji)^{-1} = (2k)^{-1} = -\frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

よって

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -j \\ -i & -k \end{pmatrix}.$$

注意 2　上の例で，四元数行列の逆行列を準行列式を用いて計算したが，それを書き直してみる．四元数 $q=q_0 1+q_1 i+q_2 j+q_3 k$ の共役 $\bar{q}=q_0 1-q_1 i-q_2 j-q_3 k$ と四元数の大きさ（の 2 乗）$|q|^2=q\bar{q}=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2$ を用いると，四元数の逆数は $q\neq 0$ に対し，$q^{-1}=\dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$ で与えられるので，四元数行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}|A|_{11}^{-1} &= (a-bd^{-1}c)^{-1}=\left(a-b\frac{\bar{d}}{|d|^2}c\right)^{-1}\\ &= |d|^2(|d|^2a-b\bar{d}c)^{-1}=|d|^2\frac{|d|^2\bar{a}-\bar{c}d\bar{b}}{||d|^2a-b\bar{d}c|^2}\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}||d|^2a-b\bar{d}c|^2\ /\ |d|^2 &= (|d|^2a-b\bar{d}c)(|d|^2\bar{a}-\bar{c}d\bar{b})\ /\ |d|^2\\ &= |a|^2|d|^2+|b|^2|c|^2-a\bar{c}d\bar{b}-b\bar{d}c\bar{a}\\ &=: \mathrm{Sdet}(A)\end{aligned}$$

は **Study（スタディ）行列式**と呼ばれる．他の成分も同様に書き直すと，古典的に知られた次の公式を得る．

$$\mathrm{Sdet}(A)\neq 0 \text{ のとき，} A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Sdet}(A)}\begin{pmatrix} |d|^2\bar{a}-\bar{c}d\bar{b} & |b|^2\bar{c}-\bar{a}b\bar{d} \\ |c|^2\bar{b}-\bar{d}c\bar{a} & |a|^2\bar{d}-\bar{b}a\bar{c} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

$\mathrm{Sdet}(A)$ は n 次正方行列でも定義され，次が成り立つことが知られている [4].

$$\text{四元数行列 } A \text{ が正則} \iff \mathrm{Sdet}(A)\neq 0$$

練習問題　公式 (4.8) を使って四元数行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ の逆行列を計算し，準行列式による計算と比較せよ．

注意 3 賢明な読者は，準行列式を用いた逆行列の公式 (4.6) では，例えば単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列の (1,2) 成分や (2,1) 成分が求められないじゃないか，と思うだろう．この問題は後述の**ホモロジカル関係式**と呼ばれる準行列式どうしの関係式によって解決される．

5 準行列式の定義

いままでの話をもとに，一般の準行列式を定義しよう．成分が結合律 $(ab)c = a(bc)$ さえ満たせば，非可換でも大丈夫である．n 次正方行列 A の (i,j)-準行列式は次のように定義され，どの定義も同値であるので必要に応じて使い分ければよい．

定義 1 A の成分の位置 (i,j) に対して，

$\mathrm{r}_i{}^j$: A の i 行から a_{ij} を除いた行ベクトル，

$\mathrm{c}_j{}^i$: A の j 列から a_{ij} を除いた列ベクトル，

A^{ij}: A から i 行と j 列を取り除いてできる $(n-1)$ 次正方行列，

さらに $(A^{ij})^{-1}$ が存在するとする．このとき，

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \mathrm{r}_i{}^j \cdot (A^{ij})^{-1} \cdot \mathrm{c}_j{}^i.$$

定義 2 A^{-1} が存在するとき，

$$A^{-1} = (|A|_{ji}^{-1})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

定義 3 定義 1 の逆行列 $(A^{ij})^{-1}$ の部分に定義 2 を用いると，準行列式の帰納的な定義が得られる．次数の大きい準行列式を具体的に計算するときにも便利である．

まず $n = 1$ のとき，$|A|_{ij} = a_{ij}$　　(ただし $A = (a_{rs})_{r=i,s=j}$ とする)

次に $n \geq 2$ のとき,

$$|A|_{ij} = a_{ij} - \sum_{i' \in I\setminus\{i\},\, j' \in J\setminus\{j\}} a_{ii'} |A^{ij}|^{-1}_{j'i'} a_{j'j} \quad \text{ここで } I = J = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

このように，準行列式は**始点となる成分を決めるごとに** 決まるので，始点を四角で囲んだ記号もよく使われる．例えば,

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12} a_{22}^{-1} a_{21}.$$

3 次の正方行列に対する準行列式は，2 次のものを利用して，次のように計算できる．例えば，$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ とし，$|A|_{11}$ を計算する．A から 1 行目と 1 列目を除いた行列は $A^{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{2 \leq i,j \leq 3}$ であり，その逆行列は 2 次の準行列式を用いて

$$\begin{aligned}
(A^{11})^{-1} &= \begin{pmatrix} |A^{11}|^{-1}_{22} & |A^{11}|^{-1}_{32} \\ |A^{11}|^{-1}_{23} & |A^{11}|^{-1}_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{22} - a_{23} a_{33}^{-1} a_{32})^{-1} & (a_{32} - a_{33} a_{23}^{-1} a_{22})^{-1} \\ (a_{23} - a_{22} a_{32}^{-1} a_{33})^{-1} & (a_{33} - a_{32} a_{22}^{-1} a_{23})^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書けるので,

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} - (a_{12}\ a_{13}) \begin{pmatrix} |A^{11}|^{-1}_{22} & |A^{11}|^{-1}_{32} \\ |A^{11}|^{-1}_{23} & |A^{11}|^{-1}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} - a_{12} |A^{11}|^{-1}_{22} a_{21} - a_{12} |A^{11}|^{-1}_{32} a_{31} \\
&\qquad - a_{13} |A^{11}|^{-1}_{23} a_{21} - a_{13} |A^{11}|^{-1}_{33} a_{31}
\end{aligned}$$

$$= a_{11} - a_{12}(a_{22} - a_{23}a_{33}^{-1}a_{32})^{-1}a_{21} - a_{12}(a_{32} - a_{33}a_{23}^{-1}a_{22})^{-1}a_{31}$$
$$- a_{13}(a_{23} - a_{22}a_{32}^{-1}a_{33})^{-1}a_{21} - a_{13}(a_{33} - a_{32}a_{22}^{-1}a_{23})^{-1}a_{31}. \quad (5.2)$$

6 準行列式の性質

準行列式は「行列式の比の非可換化」であるため，その性質は行列式の場合とよく似ている部分と，大きく異なる部分がある．

6.1 準行列式の行（または列）の入れ替えに対する不変性

命題 2 準行列式は行（または列）の入れ替えに対して不変である．これは行列式の交代性と大きく異なる性質である．

〔例 3〕

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & \boxed{a_{11}} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{11}} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}.$$

6.2 行，列の定数倍

A の i 行目を左から λ 倍した行列を B とすると，

$$|B|_{kj} = \begin{cases} \lambda|A|_{ij} & \text{for} \quad k = i \\ |A|_{kj} & \text{for} \quad k \neq i \end{cases}.$$

〔例 4〕

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} = \lambda a_{11} - \lambda a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} = \lambda|A|_{11},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{22} = a_{22} - a_{21}(\lambda a_{11})^{-1}\lambda a_{12} = |A|_{22}.$$

同様に，A の j 列目を右から μ 倍した行列を C とすると，

$$|C|_{il} = \begin{cases} |A|_{ij}\mu & \text{for} \quad l = j \\ |A|_{il} & \text{for} \quad l \neq j \end{cases} .$$

〔例 5〕

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mu & a_{12} \\ a_{21}\mu & a_{22} \end{vmatrix}_{11} = a_{11}\mu - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}\mu = |A|_{11}\mu,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mu & a_{12} \\ a_{21}\mu & a_{22} \end{vmatrix}_{22} = a_{22} - a_{21}\mu(a_{11}\mu)^{-1}a_{12} = |A|_{22}.$$

これより A の第 i 行の成分がすべて 0，または第 j 列の成分がすべて 0 のとき $|A|_{ij} = 0$ であることに注意しておく．

6.3　行や列を加えること

A の k 行目をある行に加えた行列を B とすると，

$$|B|_{ij} = |A|_{ij} \quad \text{for} \quad i \neq k, \quad j = 1, \cdots, n.$$

〔例 6〕

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} &= a_{11} + a_{21} - (a_{12}+a_{22})a_{22}^{-1}a_{21} \\ &= a_{11} + a_{21} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21} - a_{21} \\ &= |A|_{11}. \end{aligned}$$

同様に，A の l 列目をある列に加えた行列を C とすると，

$$|C|_{ij} = |A|_{ij} \quad \text{for} \quad j \neq l, \quad i = 1, \cdots, n.$$

〔例 7〕

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}_{11} = a_{11}+a_{12}-a_{12}a_{22}^{-1}(a_{21}+a_{22})$$
$$= a_{11}+a_{12}-a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}-a_{12}$$
$$= |A|_{11}.$$

6.4 1次従属性と準行列式

命題 3 $|A|_{ij}$ が定義されるとき，次の三つは同値である．

1. $|A|_{ij}=0$,
2. 行列 A の第 i 行は A の他の行の左 1 次結合，
3. 行列 A の第 j 列は A の他の列の右 1 次結合．

〔例 8〕

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}-a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}=0$$
$$\iff \quad a_{11}=\lambda a_{21},\ a_{12}=\lambda a_{22} \quad (\lambda = a_{12}a_{22}^{-1}).$$

また，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{11}\lambda+a_{12}\mu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\lambda+a_{22}\mu \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}\lambda+a_{32}\mu \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\lambda+a_{12}\mu-(a_{11}\ a_{12})\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}\mu\right\}$$
$$= a_{11}\lambda+a_{12}\mu-(a_{11}\ a_{12})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda-(a_{11}\ a_{12})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mu$$
$$= 0.$$

6.5　準行列式のラプラス展開公式の導出

定義2を用いて，準行列式のラプラス展開を導いてみよう [15]．(i,j) をひとつ固定する．まず，

$$
\begin{aligned}
E &= AA^{-1}, \\
\delta_{ik} &= \sum_{l=1}^{n} a_{il}|A|_{kl}^{-1} = a_{ij}|A|_{kj}^{-1} + \sum_{l\neq j} a_{il}|A|_{kl}^{-1}. \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

まず両辺の非対角成分 $(i \neq k)$ から，いわゆる**ホモロジカル関係式 (homological relations)** と呼ばれる重要な関係式が導かれる．簡単のため $n = 2$ の場合で見てみると，(6.1) は

$$
\begin{aligned}
-a_{ij}|A|_{kj}^{-1} &= a_{il}|A|_{kl}^{-1}, \\
-|A|_{kj}\ a_{ij}^{-1} &= |A|_{kl}\ a_{il}^{-1}, \\
-|A|_{ij}\ a_{sj}^{-1} &= |A|_{il}\ a_{sl}^{-1} \quad \text{ここで } A = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{sj} & a_{sl} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

一般に，次のような重要な恒等式が導かれる．

命題 4　1. 行ホモロジカル関係式：

$$
-|A|_{ij} \cdot |A^{il}|_{sj}^{-1} = |A|_{il} \cdot |A^{ij}|_{sl}^{-1} \qquad s \neq i,
$$

2. 列ホモロジカル関係式：

$$
-|A^{kj}|_{it}^{-1} \cdot |A|_{ij} = |A^{ij}|_{kt}^{-1} \cdot |A|_{kj} \qquad t \neq j.
$$

注意 4　この定理より，$|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj}$ は s によらない．同様に，$|A^{kj}|_{it}|A^{ij}|_{kt}^{-1}$ は t によらない．この事実は，準行列式のさまざまな応用において利用される．

次に対角成分 $(i=k)$ を見てみると, (6.1) は

$$
\begin{aligned}
1 &= a_{ij}|A|_{ij}^{-1} + \sum_{l\neq j} a_{il}|A|_{il}^{-1}, \\
|A|_{ij} &= a_{ij} + \sum_{l\neq j} a_{il}|A|_{il}^{-1}|A|_{ij} \\
&= a_{ij} - \sum_{l\neq j} a_{il}|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj} \quad \text{（ここで行ホモロジカル関係式を使った）.}
\end{aligned}
$$

系 5（準行列式のラプラス展開） 任意の $s\neq i$ と $t\neq j$ に対して,

$$
\begin{aligned}
|A|_{ij} &= a_{ij} - \sum_{l\neq j} a_{il}|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj} \qquad \text{（行展開）}, \\
|A|_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k\neq i} |A^{kj}|_{it}|A^{ij}|_{kt}^{-1}a_{kj} \qquad \text{（列展開）}.
\end{aligned}
$$

〔例 9〕 準行列式の行展開の例を挙げる.

$$
\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} - a_{12}|A^{11}|_{s2}^{-1}|A^{12}|_{s1} - a_{13}|A^{11}|_{s3}^{-1}|A^{13}|_{s1} \qquad (s=2 \text{ または } s=3)
$$

$$
= a_{11} - a_{12}\begin{vmatrix} \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} \boxed{a_{21}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} \boxed{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
$$

または

$$
= a_{11} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} \end{vmatrix}.
$$

練習問題 このラプラス展開による計算と以前の (5.2) が一致することを確かめよ.

注意 5 ホモロジカル関係式は次のようにも書かれることを注意しておく．

- 行ホモロジカル関係式：

$$|A|_{ij} = |A|_{il}\cdot(-|A^{ij}|_{sl}^{-1}|A^{il}|_{sj}) = |A|_{il}\begin{vmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ 0\cdots & \boxed{0} & \cdots 0 & 1 & 0\cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{sj} & & a_{sl} & \\ & \vdots & & \vdots & \end{vmatrix}_{ij}.$$

- 列ホモロジカル関係式：

$$|A|_{ij} = (-|A^{kj}|_{it}|A^{ij}|_{kt}^{-1})\cdot|A|_{kj} = \begin{vmatrix} & 0 & & & \\ \cdots & \boxed{0} & \cdots & a_{it} & \cdots \\ & \vdots & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & a_{kt} & \cdots \\ & \vdots & & & \end{vmatrix}_{ij} |A|_{kj}.$$

ここで，単位行列のように成分に 0 をもつ行列の逆行列を準行列式で求めるやり方を紹介しよう．例えば，列ホモロジカル関係式

$$|A|_{12} = a_{12} - a_{11}a_{21}^{-1}a_{22} = -a_{11}a_{21}^{-1}(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}) = -a_{11}a_{21}^{-1}|A|_{22}$$

より

$$|A|_{12}^{-1} = -|A|_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1} \tag{6.2}$$

であるので，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては，

$$|E|_{12}^{-1} = -|E|_{22}^{-1}\cdot 0\cdot 1^{-1} = 0.$$

同様に $|E|_{21}^{-1} = 0$ となる．

6.6 シルベスターの恒等式

定理 6 $A=(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ に対し，その小行列 $A_0=(a_{ij})_{i,j=1,\cdots,k}$ が逆行列をもつとする．このとき，$p,q=k+1,\cdots,n$ に対し，

$$c_{pq}=\begin{vmatrix} & & & a_{1q}\\ & A_0 & & \vdots\\ & & & a_{kq}\\ a_{p1} & \cdots & a_{pk} & a_{pq}\end{vmatrix}_{pq},\quad C=(c_{pq})_{p,q=k+1,\cdots,n}$$

とおくと，次の恒等式（**シルベスターの恒等式**，または**非可換ヤコビの公式**）が成り立つ．

$$|A|_{ij}=|C|_{ij}\quad\text{for}\quad i,j=k+1,\cdots,n \tag{6.3}$$

(A_0 を C に対するピボット (pivot) と呼ぶ).

〔例 10〕

$$|A|_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}_{33}$$

において，a_{11} をピボットにして計算すると，

$$c_{pq}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1q}\\ a_{p1} & a_{pq}\end{vmatrix}_{pq}\qquad (p,q=2,3).$$

よって，

$$|A|_{33}=|C|_{33}=\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23}\\ c_{32} & \boxed{c_{33}}\end{vmatrix}=c_{33}-c_{32}c_{22}^{-1}c_{23}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & \boxed{a_{33}}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & \boxed{a_{32}}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & \boxed{a_{22}}\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & \boxed{a_{23}}\end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

注意 6　A の成分がすべて可換のとき，式 (4.5) より (6.4) の両辺は

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{11}} - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{11}} \frac{a_{11}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11}}$$

となるので,

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

を得る．これは行列式における**ヤコビの公式**である [2].

練習問題（準行列式の準行列式）　3 次正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とブロック分けしたときの準行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & B \\ C & \boxed{D} \end{vmatrix} = D - Ca_{11}^{-1}B$$

を考える．ただし，この 2 次正方行列の成分番号は $D = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に合わせておく．これの (3,3)-準行列式（右下を出発点としたもの）

$$|D - Ca_{11}^{-1}B|_{33}$$

が (6.4) の右辺に等しい，したがって $|A|_{33}$ に等しくなることを示せ.

7 ケーリー - ハミルトンの定理の非可換版

7.1 (可換)ケーリー - ハミルトンの定理の復習

線形代数で有名なケーリー - ハミルトンの定理は次のようなものであった.

定理 7 n 次正方行列 A の特性多項式 $\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ に対し, 次の恒等式が成り立つ.

$$\Phi_A(A) = O \tag{7.1}$$

例えば $n = 2$ の場合, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し, 特性多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A \end{aligned}$$

であるので, 次の恒等式が成り立つ.

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)E = O \tag{7.2}$$

7.2 非可換ケーリー - ハミルトンの定理

非可換成分の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し, 次の二つの (非可換)特性多項式を考える.

$$\begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{11}+a_{12}a_{22}a_{12}^{-1})\lambda + (a_{12}a_{22}a_{12}^{-1}a_{11}-a_{12}a_{21}) \\ &\equiv \lambda^2 - (\operatorname{tr}_1 A)\lambda + \det{}_1 A\,, \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{22}+a_{21}a_{11}a_{21}^{-1})\lambda + (a_{21}a_{11}a_{21}^{-1}a_{22}-a_{21}a_{12}) \\ &\equiv \lambda^2 - (\operatorname{tr}_2 A)\lambda + \det{}_2 A \end{aligned} \tag{7.4}$$

このとき，次の恒等式が成り立つ [6].

$$A^2 - \begin{pmatrix} \mathrm{tr}_1 A & 0 \\ 0 & \mathrm{tr}_2 A \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} \det_1 A & 0 \\ 0 & \det_2 A \end{pmatrix} = O \qquad (7.5)$$

これが**ケーリー - ハミルトンの定理の非可換版**（のひとつ）である．もちろん，成分がすべて可換な場合，(7.5) は (7.2) に一致する．

練習問題 2 次の非可換成分行列 A に対し，恒等式 (7.5) が成り立つことを直接計算で確かめよ．

A の多項式の係数が**スカラー（スカラー行列）から対角行列に変わっている**ところがミソである．その対角行列の対角成分はどのように求めたのだろう．ここで発想を逆転させて，A が与えられたとき，未知変数 $C_{(1)1}$, $C_{(1)2}$, $C_{(2)1}$, $C_{(2)2}$ に対する方程式

$$A^2 - \begin{pmatrix} C_{(1)1} & 0 \\ 0 & C_{(2)1} \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} C_{(1)2} & 0 \\ 0 & C_{(2)2} \end{pmatrix} = O \qquad (7.6)$$

を考えてみる．簡単のため

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2)$$

とおくと，(7.6) は，

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{(1)1} & 0 \\ 0 & C_{(2)1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} C_{(1)2} & 0 \\ 0 & C_{(2)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この1行目，つまり(1,1)成分と(1,2)成分をまとめて書くと，

$$(C_{(1)1}, C_{(1)2})\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \end{pmatrix} = (a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(2)}). \tag{7.7}$$

行列 $\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \end{pmatrix}$ が逆行列をもつなら，右連立1次方程式(7.7)は一意に解けて，

$$(C_{(1)1}, C_{(1)2}) = (a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(2)})\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \end{pmatrix}^{-1} \tag{7.8}$$

と求まる．これを「特性多項式」のような形に表してみよう．

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - C_{(1)1}\lambda - C_{(1)2} \\ &= \lambda^2 - (C_{(1)1}, C_{(1)2})\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11}^{(2)}, a_{12}^{(2)})\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \boxed{\lambda^2} \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \lambda \\ a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{7.9}$$

とまとめられる(準行列式の定義を思い出してほしい)．これが上記の「1行目に対する」特性多項式 $\Phi_1(\lambda)$ である．「2行目に対する」特性多項式 $\Phi_2(\lambda)$ も同様にして求められる．

練習問題　(7.9) が $\Phi_1(\lambda)$ に一致することを確かめよ．

この計算を一般化して，次の定理が成り立つ．

定理 8 非可換成分の n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，i 行目に対する「非可換特性多項式」を次のように定義する．

$$\Phi_i(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{i1}^{(n)} & a_{i2}^{(n)} & \cdots & a_{in}^{(n)} & \boxed{\lambda^n} \\ a_{i1}^{(n-1)} & a_{i2}^{(n-1)} & \cdots & a_{in}^{(n-1)} & \lambda^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \cdots & a_{in}^{(1)} & \lambda \\ a_{i1}^{(0)} & a_{i2}^{(0)} & \cdots & a_{in}^{(0)} & 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} C_{(i)k}\lambda^{n-k} \tag{7.10}$$

ここで $A^k=(a_{ij}^{(k)})$ とおいた．各 $\Phi_i(\lambda)$ が定義されるとき，次の形の恒等式が成り立つ．

$$A^n - \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} C_{(1)k} & & & \\ & C_{(2)k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{(n)k} \end{pmatrix} A^{n-k} = O \tag{7.11}$$

〔例 11〕 A を量子群 $GL_q(n)$ の生成子の行列 $A_q = (a_{ij})$ とすると，非可換ケーリー - ハミルトンの定理（量子ケーリー - ハミルトンの定理）が成り立つことが知られている [7]．例えば $n = 2$ では,
関係式

$$
\begin{aligned}
a_{11}a_{22} - a_{22}a_{11} &= (q^{-1} - q)a_{12}a_{21}, \\
a_{12}a_{22} &= q^{-1}a_{22}a_{12}, \\
a_{11}a_{21} &= q^{-1}a_{21}a_{11}, \\
a_{12}a_{21} &= a_{21}a_{12}
\end{aligned}
$$

を用いて次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&A_q^2 - (q^{1/2}a_{11} + q^{-1/2}a_{22})\begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{1/2} \end{pmatrix}A_q \\
&\qquad + (a_{11}a_{22} - q^{-1}a_{12}a_{21})\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = O.
\end{aligned}
$$

この恒等式は (7.5) の特別な場合となっている．実際，(7.3), (7.4) を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= \lambda^2 - (a_{11} + q^{-1}a_{22})\lambda + q^{-1}a_{11}a_{22} - q^{-2}a_{12}a_{21}, \\
\Phi_2(\lambda) &= \lambda^2 - (q\,a_{11} + a_{22})\ \lambda\ + q\,a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

となっている.

8　行列のスペクトル分解の非可換版

8.1　(可換成分)行列のスペクトル分解の復習

n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とし，簡単のため固有値の重複度はすべて 1 とする．$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対する A の固有空間を $V_1, \cdots, V_n$，各固有空間への射影をそれぞれ $P_1, \cdots, P_n$ とすると，これらは次を満たす．

$$E = P_1 + \cdots + P_n \quad (E \text{ は単位行列}), \tag{8.1}$$

$$P_i^2 = P_i \ \ (i = 1, \cdots, n), \quad P_iP_j = P_jP_i = O \ \ (i \neq j) \tag{8.2}$$

このとき任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $P_i\boldsymbol{v} \in V_i$ であるから

$$AP_i\boldsymbol{v} = \lambda_i P_i \boldsymbol{v} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

が成り立つことに注意すると，(8.1) より，

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} &= AE\boldsymbol{v} \\ &= A(P_1 + \cdots + P_n)\boldsymbol{v} \\ &= AP_1\boldsymbol{v} + \cdots + AP_n\boldsymbol{v} \\ &= \lambda_1 P_1\boldsymbol{v} + \cdots + \lambda_n P_n \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

よって行列 A は

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \tag{8.3}$$

と分解できる．これを行列 A の**スペクトル分解**という [1].

この射影行列 $P_1, \cdots, P_n$ は A から直接計算で求めることができる．

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$$

とすると，射影行列の性質 (8.2) より

$$\begin{aligned} A^2 &= (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n)^2 \\ &= \lambda_1^2 P_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 P_n^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j P_i P_j \\ &= \lambda_1^2 P_1 + \cdots + \lambda_n^2 P_n. \end{aligned}$$

同様にして

$$A^k = \lambda_1^k P_1 + \cdots + \lambda_n^k P_n$$

であり，さらに多項式 $f(\lambda)$ について

$$f(A) = f(\lambda_1) P_1 + \cdots + f(\lambda_n) P_n$$

が成り立つので，A の多項式で，例えば P_1 を構成するには

$$f(\lambda_1) = 1,\ f(\lambda_2) = \cdots = f(\lambda_n) = 0 \tag{8.4}$$

となる多項式を持ってくればよい．そのような多項式は

$$f_1(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)}$$

とすればよい．そうすれば

$$P_1 = f_1(A) = \frac{(A - \lambda_2 E) \cdots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)}$$

と求めることができる．ここで用いた多項式

$$\begin{aligned} f_i(\lambda) &= \prod_{j \neq i} \frac{(\lambda - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ &= \frac{(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{j-1})(\lambda - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{j-1})(\lambda_i - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n)} \end{aligned} \tag{8.5}$$

を**ラグランジュ補間式**という．

ここで，ラグランジュ補間式を用いて作られた A の多項式が射影行列となる様子を例で見てみよう．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると固有値は $\lambda = 6,\ -3$ で

$$f_1(A) = \frac{A-(-3)E}{6-(-3)} = \frac{1}{9}(A+3E) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$f_2(A) = \frac{A-6E}{(-3)-6} = -\frac{1}{9}(A-6E) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

となる．$f_1(A)$, $f_2(A)$ が射影行列の条件 (8.1), (8.2) を満たすことは，もちろん成分計算をしてもわかるが，ここではケーリー - ハミルトンの定理

$$A^2 - 3A - 18E = O$$

を用いてみよう．すると，

$$\begin{aligned} f_1(A)^2 &= \frac{1}{9^2}(A^2+6A+9E) = \frac{1}{9^2}(3A+18E+6A+9E) \\ &= \frac{1}{9}(A+3E) = f_1(A), \\ f_2(A)^2 &= \frac{1}{9^2}(A^2-12A+36E) = \frac{1}{9^2}(3A+18E-12A+36E) \\ &= -\frac{1}{9}(A-6E) = f_2(A), \\ f_1(A)f_2(A) &= \frac{1}{9}(A+3E)\cdot\frac{1}{-9}(A-6E) = -\frac{1}{9^2}(A^2-3A-18E) \\ &= O = f_2(A)f_1(A) \end{aligned}$$

となる．注目すべき点は，どれもケーリー - ハミルトンの定理が射影行列の性質を導いていることである．これがスペクトル分解の非可換版を作るポイントの一つとなる．

二つ目のポイントはラグランジュ補間式とファンデルモンド行列との関係である [3]．次が成り立つことに注意する．(両辺の λ に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ を代入して確かめよ.)

$$\lambda^m = \lambda_1^m f_1(\lambda) + \lambda_2^m f_2(\lambda) + \cdots + \lambda_n^m f_n(\lambda) \quad (m = 0, 1, \cdots, n-1)$$

これらを行列で表すと（ここでは次数の大きい方から並べることにする）

$$\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ & & \cdots & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \\ \vdots \\ f_n(\lambda) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \\ \vdots \\ f_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

この係数行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ & & \cdots & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

は**ファンデルモンド(Vandermonde) 行列**である．これを使ってラグランジュ補間式は次のように表せる．

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \\ \vdots \\ f_n(\lambda) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

逆行列の成分はすべて準行列式で書けるので，(8.6) は理論の非可換化に役立つ関係式である．

8.2　可換から非可換へ

前節の考察をもとに，成分が非可換な場合にも使える理論へと発展させよう．以後，$x_1, x_2, \cdots, x_n, z$ は非可換な数（または行列）とする．

定義 4　$x_1, x_2, \cdots, x_k$ に対し，**ファンデルモンド準行列式**を次で定義する．

$$V(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} x_1^{k-1} & \cdots & \boxed{x_k^{k-1}} \\ & \cdots & \\ x_1 & \cdots & x_k \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

定義 5（非可換ラグランジュ補間式）　$x_1, \cdots, x_n$ に対し，

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

が存在するとする．z の多項式 $f_i(z)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を次の式で定義する．

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

〔例 12〕　$n = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \begin{vmatrix} \boxed{x_1} & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} z + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \boxed{1} & 1 \end{vmatrix}^{-1} 1 \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} z + (1 - x_2^{-1} x_1)^{-1} \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} z + (x_2 - x_1)^{-1} x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} (z - x_2), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \begin{vmatrix} x_1 & \boxed{x_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} z + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & \boxed{1} \end{vmatrix}^{-1} 1 \\
&= (x_2 - x_1)^{-1} z + (1 - x_1^{-1} x_2)^{-1} \\
&= (x_2 - x_1)^{-1} z + (x_1 - x_2)^{-1} x_1 \\
&= (x_2 - x_1)^{-1} (z - x_1).
\end{aligned}
$$

補題 9 (8.7) で定義された $f_1(z), \cdots, f_n(z)$ に対し，次が成り立つ.

(1) $x_1^j f_1(z) + x_2^j f_2(z) + \cdots + x_n^j f_n(z) = z^j \quad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$

(2) $f_i(x_j) = \delta_{ij}$

定理 10 (主定理) 与えられた z, $x_1, \cdots, x_n$ が $V(x_1, \cdots, x_n, z) = 0$ を満たすとき，次が成り立つ.

$$
V_m \equiv \begin{vmatrix} x_1^m & \cdots & x_n^m & \boxed{z^m} \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & z^{n-1} \\ & \cdots & & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (m = 0, \cdots, n, n+1, \cdots) \qquad (8.8)
$$

この定理についてコメントしておく. 準行列式の性質から $m = 0, 1, \cdots, n-1$ のとき $V_m = 0$ は自明に成り立つ. $m = n$ のとき $V_n = V(x_1, \cdots, x_n, z) = 0$ は仮定である. この仮定を満たせば，$m > n$ のすべての m で $V_m = 0$ が成り立つことが定理の主張である. (8.8) は準行列式の性質をうまく使うことによって示すことができる [16].

(8.8) を書き直すと，非可換ラグランジュ補間式の定義から

$$
\begin{aligned}
z^m &= \begin{pmatrix} x_1^m & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1^m f_1(z) + \cdots + x_n^m f_n(z)
\end{aligned}
$$

なので，z に対する恒等式

$$
z^m = x_1^m f_1(z) + \cdots + x_n^m f_n(z) \quad (m = 0, 1, \cdots)
$$

を得る．

8.3　非可換成分行列のスペクトル分解

z が非可換成分行列 $A = (a_{ij})$ の場合，定理10の仮定 $V(x_1, \cdots, x_n, A) = 0$ は何を意味するのであろうか．簡単のため2次正方行列で考えよう．まず準備として，A の1行目に対する非可換特性方程式

$$
\lambda^2 - C_{(1)1}\lambda - C_{(1)2} = 0
$$

の解 $\lambda = \alpha_1$, α_2 $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ が見つかったとする．このとき，

$$
\begin{cases} \alpha_1^2 - C_{(1)1}\alpha_1 - C_{(1)2} = 0 \\ \alpha_2^2 - C_{(1)1}\alpha_2 - C_{(1)2} = 0 \end{cases},
$$

$$
(C_{(1)1}, C_{(1)2}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_1^2,\ \alpha_2^2).
$$

よって，

$$
(C_{(1)1}, C_{(1)2}) = (\alpha_1^2,\ \alpha_2^2) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{8.9}
$$

具体的には，さらに計算を進めて

$$(C_{(1)1}, C_{(1)2}) = (\alpha_1^2,\ \alpha_2^2)\begin{pmatrix} (\alpha_1-\alpha_2)^{-1} & (1-\alpha_2^{-1}\alpha_1)^{-1} \\ (\alpha_2-\alpha_1)^{-1} & (1-\alpha_1^{-1}\alpha_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_2)^{-1} + \alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)^{-1},\ \alpha_1^2(1-\alpha_2^{-1}\alpha_1)^{-1} + \alpha_2^2(1-\alpha_1^{-1}\alpha_2)^{-1})$$

$$= ((\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1},\ \alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}\alpha_2 + \alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\alpha_1)$$

これが**解と係数の関係の非可換版**であり，同時に**基本対称多項式の非可換版**にもなっている [7], [9]．もちろん，α_1 と α_2 が可換なら

$$(C_{(1)1}, C_{(1)2}) = (\alpha_1+\alpha_2,\ -\alpha_1\alpha_2)$$

となる．同様に，2 行目に対する非可換特性方程式

$$\lambda^2 - C_{(2)1}\lambda - C_{(2)2} = 0$$

の解 $\lambda = \beta_1,\ \beta_2\ (\beta_1 \neq \beta_2)$ に対しては，

$$(C_{(2)1}, C_{(2)2}) = (\beta_1^2,\ \beta_2^2)\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \tag{8.10}$$

が成り立つこともわかる．

次に，

$$V(x_1, x_2, A) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \boxed{A^2} \\ x_1 & x_2 & A \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= A^2 - (x_1^2,\ x_2^2)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}$$

において上記の α_1，α_2，β_1，β_2 を用いて

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \\ & \beta_2 \end{pmatrix}$$

とおくと，対角成分ごとの計算と，解と係数の関係 (8.9), (8.10) より，

$$\begin{aligned}
&(x_1^2,\ x_2^2)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
=\ &((x_1^2-x_2^2)(x_1-x_2)^{-1},\ x_1^2(x_2-x_1)^{-1}x_2 + x_2^2(x_1-x_2)^{-1}x_1) \\
=\ &\left(\begin{pmatrix} C_{(1)1} & \\ & C_{(2)1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{(1)2} & \\ & C_{(2)2} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

であるので，

$$V(x_1, x_2, A) = A^2 - \begin{pmatrix} C_{(1)1} & \\ & C_{(2)1} \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} C_{(1)2} & \\ & C_{(2)2} \end{pmatrix} = O$$

は非可換ケーリー - ハミルトンの定理に他ならない．

一般に A が非可換成分の n 次正方行列のときは，$x_1, \cdots, x_n$ を対角行列とし，各 (i,i) 成分に A の i 行目に対する非可換特性方程式の相異なる解をおくと，$n=2$ の場合と同様に，A に対する非可換ケーリー - ハミルトンの定理により

$$V(x_1, \cdots, x_n, A) = O \tag{8.11}$$

が成り立つ．したがって，定理 10 より A の**非可換スペクトル分解**

$$A^m = x_1^m f_1(A) + \cdots + x_n^m f_n(A) \quad (m = 0, 1, \cdots)$$

を得る．

9 四元数行列のスペクトル分解と指数行列

四元数を成分とする行列として，リー環 $sp(2)$ の元

$$A = \begin{pmatrix} i & j \\ j & -i \end{pmatrix}$$

を考え，その指数行列 $\exp tA$ を求めてみる．

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2k \\ -2k & -2 \end{pmatrix}$$

より，各行ごとの非可換特性方程式は，

$$\Phi_1(\lambda) = \begin{vmatrix} -2 & 2k & \boxed{\lambda^2} \\ i & j & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2i\lambda = 0$$

より，$\lambda = 0,\ 2i$,

$$\Phi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -2k & -2 & \boxed{\lambda^2} \\ j & -i & \lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2i\lambda = 0$$

より，$\lambda = 0,\ -2i$.

次に非可換ラグランジュ補間式

$$f_1(z) = (x_1 - x_2)^{-1}(z - x_2), \quad f_2(z) = (x_2 - x_1)^{-1}(z - x_1)$$

において $z = A,\quad x_1 = \begin{pmatrix} 2i & \\ & -2i \end{pmatrix},\quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P_1 = f_1(A) = \begin{pmatrix} 2i & \\ & -2i \end{pmatrix}^{-1} A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
P_2 &= f_2(A) = \left\{-\begin{pmatrix} 2i & \\ & -2i \end{pmatrix}\right\}^{-1}\left\{A-\begin{pmatrix} 2i & \\ & -2i \end{pmatrix}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

このようにおくと $P_i^2 = P_i,\ P_iP_j = 0\ (i \neq j), P_1+P_2 = E$ を満たしていることも確かめられる．そして，通常のスペクトル分解のように A の指数行列を簡単に求めることができる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\exp tA &= (\exp tx_1)P_1 + (\exp tx_2)P_2 \\
&= \begin{pmatrix} e^{2it} & \\ & e^{-2it} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2it}+1 & -e^{2it}k+k \\ e^{-2it}k-k & e^{-2it}+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{it}\cos t & e^{it}\sin t\ j \\ e^{-it}\sin t\ j & e^{-it}\cos t \end{pmatrix} \qquad \text{(これはリー群 } Sp(2) \text{ の元になっている)}
\end{aligned}
$$

注意 7

$$
x_1 = \begin{pmatrix} 2i & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -2i \end{pmatrix}
$$

とおいた場合，$[A, x_1] := Ax_1 - x_1A \neq 0,\ [A, x_2] \neq 0$ で，$f_1(A),\ f_2(A)$ は射影行列になっていない．それにもかかわらず，定理 10 によって，$A^m = x_1^m f_1(A) + x_2^m f_2(A)$ が成り立ち，$\exp tA$ が計算できる！(不思議！)

10 おわりに

これまで見てきたように，準行列式は非可換の世界において強力な道具であるのみならず，今まで知られていた線形代数およびその応用に対しても新しい視点を与えてくれる概念である．特に，非可換可積分系の分野では，準行列式を用いた研究がさかんにおこなわれている [5], [10], [11], [12], [13], [14].

この小論によって，少しでも多くの読者が準行列式に興味をもってもらえるなら，著者としてこれ以上の喜びはない．

参考文献

[1] 笠原晧司：線型代数と固有値問題——スペクトル分解を中心に——，現代数学社.

[2] 広田良吾：直接法によるソリトンの数理，岩波書店.

[3] 筧 三郎：工科系 線形代数，数理工学社.

[4] H. Aslaksen : Quaternionic Determinants, *The Mathematical Intelligencer* **18** (1996), 57–65.

[5] P. Etingof, I. Gelfand and V. Retakh : Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations, *Math. Res. Letters* **4** (1997), no.2–3, 413–425, q-alg/9701008.

[6] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. Wilson : Quasideterminants, *Adv. in Math.* **193** (2005), no.1, 56–141, math.QA/0208146.

[7] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh and J. Thibon : Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.* **112** (1995), 218–348, hep-th/9407124.

[8] I. Gelfand and V. Retakh : Determinants of matrices over noncommutative rings, *Funct. Anal. Appl.* **25** (1991), no.2, 91–102.

[9] I. Gelfand and V. Retakh : *Noncommutative Vieta Theorem and Symmetric Functions*, Gelfand Mathematical Seminars 1993–95, Birkhäuser, Boston, 1996, 93–100, q-alg/9507010.

[10] C. Gilson and J. Nimmo : *On a direct approach to quasideterminant solutions of a noncommutative KP equation*, nlin.SI/0701027.

[11] C. Gilson, J. Nimmo and Y. Ohta : *Quasideterminant solutions of a non-Abelian Hirota-Miwa equation*, nlin.SI/0702020.

[12] C. Gilson, M. Hamanaka and J. Nimmo : Bäcklund Transformations for Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations, *Glasgow Mathematical Journal* **51A** (2009), 83–93, arXiv:0709.2069.

[13] C. Gilson, M. Hamanaka and J. Nimmo : Bäcklund Transformations and the Atiyah-Ward ansatz for Noncommutative Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations, *Proc. Roy. Soc.* **A 465** (2009), 2613–2632, arXiv:0812.1222.

[14] M. Hamanaka : *Notes on Exact Multi-Soliton Solutions of Noncommutative Integrable Hierarchies*, JHEP0702:094 (2007), hep-th/0610006.

[15] A. Lauve : *Quantum- and quasi-Plücker coordinates*, arXiv: math/0406062.

[16] T. Suzuki : Noncommutative Spectral Decomposition with Quasideterminant, *Adv. in Math.*, Vol.217/5 (2008), 2141–2158, math/0703751.

関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する

分数冪微積の話

浅田　明

概 要

分数冪微分 $\frac{d^a}{dx^a}$, $a \in \boldsymbol{R}$, と微分の対数 $\log(\frac{d}{dx}) = \frac{d}{da}(\frac{d^a}{dx^a})|_{a=0}$ がなぜ必要なのか？ なぜそのような定義をするのか？ をガンマ (Γ) 関数など必要な予備知識の説明を含め，なるべく納得できるように説明する．

次に，例の他に分数冪微分と微分の対数の性質として，ライプニッツ (Leibniz) の公式と，変数変換 $x = e^t$ をおこなったときの変換公式を導く．最後に，これらの結果とラプラス (Laplace) 変換を用いて，積分変換

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \frac{f(s)}{\Gamma(1+s)} ds$$

によって x-空間 $(x > 0)$ の関数に対する分数冪微分と微分の対数は s-空間の関数に対する平行移動と微分に移る：すなわち

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[f(s+a)](x), \quad \log\left(\frac{d}{dx}\right)\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x),$$

となることを示す．

1　はじめに

数の冪 x^n は n が整数の場合しか考えられていなかったが，正方形の面積が与えられたとき辺の長さを求めるには $x^{\frac{1}{2}}$ という分数冪が必要になった．アーベル (Abel) は「ある曲線に沿って落下する質点の定点までの到達時間が与えれらたとき，曲線を求めよ」という力学の問題が $f(x) = H[F(x)]$；

$$H[F(x)] = \int_0^x \frac{F(t)}{\sqrt{x-t}}dt,$$

という形の積分方程式 ($f(x)$ は既知，$F(x)$ が未知) に帰着されることを示した．$H[H[F(x)]] = \pi \int_0^x F(t)dt$ となるから $\frac{1}{\sqrt{\pi}}H[F(x)]$ は $F(x)$ の $\frac{1}{2}$ 回の不定積分と解釈される．

アーベル以後，多くの研究者によって分数冪の微積は，力学，電磁気学，化学，生命科学等多くの分野で応用され，最近では金融工学への応用も試みられている．また 2004 年以来隔年で開かれている「分数冪微積とその応用」国際会議のホームページ (http://web.tuke.sk/fda10) を見ると，最近の成果として制御理論，信号・画像処理への応用が特筆されている．

しかし日本では数学科（数理科学科）でも分数冪微分はほとんど教えられていないようだし，微積の教科書で少し触れたものがある程度で分数冪微積についての入門書や単行本もないようである．そのため，この小論では分数冪微分 $\frac{d^a}{dx^a}$ の定義をなるべく納得しやすいように説明するとともに，数の冪が対数によって支配されているように分数冪微分を背後で支配する微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})$ を早めに導入した．

分数冪微積は，未知関数の分数冪微分の入った方程式：分数冪微分方程式として応用で現れるのが普通である．また，$\frac{d^a}{dx^a}$ や $\log(\frac{d}{dx}) + \log x + \gamma$ を変形消滅演算子，$x^a, \log x$ をそれに対する変形生成演算子とした正準交換関係の変形を考えるのも興味ある問題である．しかしそれらを説明するには多くの紙数が要るので割愛し，代わりに変数変換，ラプラス変換とゲージ変換 $f(s) \to \frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ を組み合わせることにより分数冪微分は平行移動に，微分の対数は微分に移る，という最近の結果を紹介した．

なお読者の負担を避けるため，関数論や関数解析の使用は避け，多変数微積やガンマ関数については簡単ではあるが説明した．不十分な所もあるかと恐れているが，大学卒業者や学生だけでなく意欲ある高校生も読めるように

書いたつもりである.

2　高階の不定積分とアーベルの積分方程式

1. 高階微分には $\frac{d^n}{dx^n}$ という記号があるのに不定積分を繰り返し施す高階の不定積分には特別の記号がないことに疑問をもったことはないだろうか？

これから説明するように高階の不定積分は特別の記号を使わなくても普通の不定積分を使って表される. しかもその表し方を見ると分数階の不定積分はこうすれば得られる, という見当がつく. そこでまず, 高階の不定積分の表し方を説明する.

$\int_0^x f(t)dt = F(x)$ とすれば $\int_0^x F(t)dt$ が原点 0 からの $f(x)$ の 2 階の不定積分だが, 部分積分を使えば

$$\int_0^x F(t)dt = \Big[(t-c)F(t)\Big]_0^x - \int_0^x (t-c)f(t)dt$$

である. ここで x は積分変数 t と独立だから $c = x$ と選べば, $F(0) = 0$ により $\Big[(t-x)F(t)\Big]_0^x = 0$ となって

$$\int_0^x F(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

である. よって $f(x)$ の 2 階の不定積分は次のように普通の不定積分で表される.

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(s)ds\right)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

さらに

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)F(t)dt &= \left[-\frac{(x-t)^2}{2}F(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}f(t)dt \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}f(t)dt\end{aligned}$$

だから，$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t)dt$ が $f(x)$ の原点 0 からの 3 階の不定積分になる．この形を見ると $I_0^n f(x) = I^n f(x)$;

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad n \geq 1. \tag{2.1}$$

が $f(x)$ の原点 0 からの n 階の不定積分になることが推測される．

定理 1　$I^n f(x)$ は $f(x)$ の n 階の不定積分である．

証明　$n = 1, 2, 3$ のときは定理は正しい．n で正しいとすれば $I^n F(x)$ は $F(x)$ の n 階の不定積分だから $f(x)$ の $(n+1)$ 階の不定積分である．一方

$$\begin{aligned} I^n F(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t)dt \\ &= \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} F(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F(t)dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt \end{aligned}$$

だから $I^n F(x) = I^{n+1} f(x)$ である．よって帰納法により定理が成立する．

2. $I^n f(x)$ の被積分関数 $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)$ は 2 変数の関数である．ここで簡単に 2 変数関数の微積について説明する．知識のある読者は飛ばせばよい．

平面の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ は $\lim_{n\to\infty} \{(x_0 - x_n)^2 + (y_0 - y_n)^2\} = 0$ となるとき (x_0, y_0) に収束すると定義する．関数 $f(x, y)$ は

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0), \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

が成立すれば (x_0, y_0) で連続といい，$f(x, y)$ が領域 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ で定義されそのすべての点で連続なら D で連続という．$f(x, y)$ が連続なら x_0, y_0 を固定したとき $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ は x, y の関数として連続だが，$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$ を見ればわかるように逆は成立しない．

$f(x, y)$ の x, y に関する偏微分 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ は

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

で定義される.

$K(x,y)$, $G(x,y)$ をそれぞれ $\{(x,y)\,|\,c\le x\le d,\ a\le y\le b\}$ ($a\ne c$, $b\ne d$ でもよい), $\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ a\le y\le x\}$ で定義された関数, $f(x)$ を $a\le x\le b$ で定義された関数とするとき,

$$Kf(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dy,\quad Gf(x)=\int_a^x G(x,y)f(y)dy$$

を $K(x,y)$, $G(x,y)$ を核とする積分作用素あるいは f の積分変換という. また, K はフレドホルム (Fredholm) 型, G はヴォルテラ (Volterra) 型の積分作用素 (変換) という. $I^n f(x)$ は $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ を核とするヴォルテラ型の積分変換である.

命題 1 a, b が有限, $K(x,y)$, $G(x,y)$ は 2 変数関数として連続で x について偏微分可能とする. f が連続なら $Kf(x)$, $Gf(x)$ は微分可能で

$$\frac{d}{dx}Kf(x) = \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}f(y)dy, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx}Gf(x) = G(x,x)f(x)+\int_a^x \frac{\partial G(x,y)}{\partial x}f(y)dy \tag{2.3}$$

である.

証明 $\frac{Kf(x+h)-Kf(x)}{h}=\int_a^b \frac{K(x+h,y)-K(x,y)}{h}f(y)dy$ だから, a,b が有限で K, f が連続なことから (2.2) が得られる.

G, f の連続性と積分の平均値の定理から

$$\begin{aligned}
&\frac{Gf(x+h)-Gf(x)}{h}\\
&=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}G(x+h,y)f(y)dy-\int_a^x G(x,y)f(y)dy\right)\\
&=\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h}G(x+h,y)f(y)dy+\int_a^x\big(G(x+h,y)-G(x,y)\big)f(y)dy\right)
\end{aligned}$$

$$= G(x+h, x+\theta h)f(x+\theta h) + \int_a^x \frac{G(x+h,y)-G(x,y)}{h} f(y)dy$$

となる．よって (2.3) が成立する．

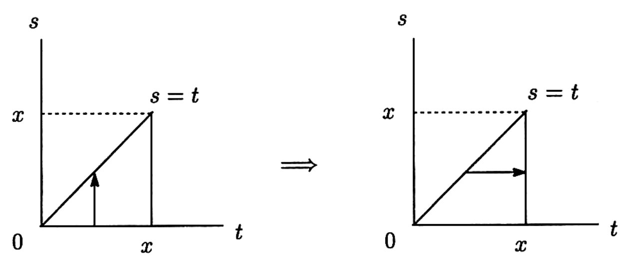
(2.3) から $\frac{d}{dx}I^n f(x) = I^{n-1}f(x)$ である．これからも帰納法で定理 1 が証明される．

a,b 双方またはいずれか一方が有限でなければ，f が無限遠点で十分速く 0 に収束することを仮定しなければ Kf は定義できない．しかしこの場合も f が無限遠点で十分速く 0 に収束すれば (2.2) は成立する．

高階の不定積分という観点からは，直接 $\int_0^x I^n f(t)dt = I^{n+1}f(x)$ を示すのが望ましい．積分

$$\int_0^x I^n f(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds\right)dt$$

を計算するには，領域 $\{(t,s) \mid 0 \le t \le x, 0 \le s \le t\}$ が図のように



$\{(t,s) \mid s \le t \le x, 0 \le s \le x\}$ とも表されることに注意して，積分の順序を交換すれば

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(t,s)ds\right)dt = \int_0^x \left(\int_s^x f(t,s)dt\right)ds$$

となることを使えばよい．そうすれば

$$\int_0^x I^n f(t)dt = \int_0^x \left(\int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right) f(s)ds = \int_0^x \frac{(x-s)^n}{n!} f(s)ds$$

となって $\int_0^x I^n f(t)dt = I^{n+1}f(x)$ が得られる.

一般の領域 D での2重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ の説明は省略するが，実際の計算には変数を変換して D を計算しやすい領域 S に替えることが多い．この場合 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ で D が S の上に1対1に変換されたとして

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(s,t),y(s,t))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right|dsdt$$

となる．ただし $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$ は変換のヤコビ (Jacobi) 行列で S の各点で正則なことを仮定する.

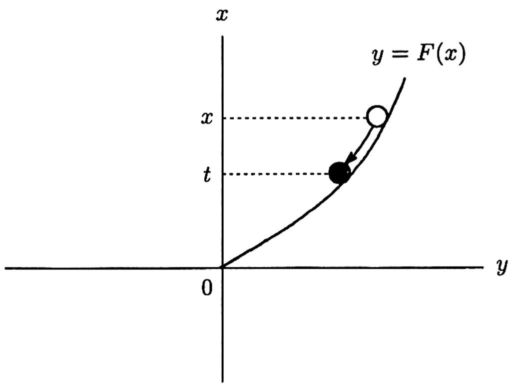
〔例〕 変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で $\boldsymbol{R}^2$ (正しくは $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$) は $(0,\infty)\times[0,2\pi)$ に移り $dxdy = rdrd\theta$ だから $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ とすれば

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{\boldsymbol{R}^2\setminus\{0\}} e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &= \int_0^{\infty} re^{-r^2}dr \int_0^{2\pi} 1d\theta = \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty}\cdot 2\pi = \pi \end{aligned}$$

となって $I = \sqrt{\pi}$ と計算される．これは有名な積分で，この小論でも後で使う.

3. $I^n f$ は $\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ を核とする積分変換である．それなら，c が整数でないとき $(x-t)^c$ を核とする意味のある積分変換はあるだろうか? そのような積分変換が最初に現れたのは，次の力学の問題である.

問題　曲線 $y = F(x)$ に沿って点 $P = (x, F(x))$ から点 O まで質点が自由落下すると仮定する．点 x まで落下したとき点 O に到達する時間が与えられた関数 $f(x)$ であるとき $F(x)$ を求めよ.



図のように O を座標の原点 0 にとり $(F(0)=0)$，普通と逆だが x 軸を鉛直線，y 軸を水平にとる．また，t を（0 から x でなく）x から 0 に動くパラメータとする．曲線 $y=F(x)$ の a から b までの長さは $\int_a^b \sqrt{1+F'(t)^2}dt$ で与えられる．また重力定数を g とすれば，x から t まで自由落下したときの速度は $\sqrt{2g(x-t)}$ である．よって $f(x)=\displaystyle\int_x^0 \frac{\sqrt{1+F'(t)^2}}{\sqrt{2g(x-t)}}(-dt)$ となり $f(x)$ は方程式

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+F'(t)^2}{2g(x-t)}}dt \tag{2.4}$$

の解である．この方程式はアーベルが提出したのでアーベルの積分方程式と呼ばれている．数学史上最初の積分方程式である．

$H(x)=\sqrt{\dfrac{1+F'(x)^2}{2g}}$ とおけば (2.4) は $f(x)=\int_0^x \frac{H(t)}{\sqrt{x-t}}dt$ となり，核が $(x-t)^{\frac{1}{2}-1}$ の積分変換となる．この方程式を解くため補題を準備する．

補題 1　変数変換 $(t-s)=u(x-s)$, $(s=s)$ で領域 $\{(t,s)\,|\,0\le t\le x,\ 0\le s\le t\}$ は $\{(u,s)\,|\,0\le u\le 1,\ 0\le s\le x\}$ に移り

$$(x-t)=(1-u)(x-s), \quad dt=(x-s)du \ (dtds=(x-s)duds)$$

である．

証明 $0 \leq t \leq x$ と $0 \leq s \leq t$ から $0 \leq (t-s) \leq x-s$ となり $0 \leq u \leq 1$ となって，補題前半がわかる．また $x-t = (x-s)-(t-s)$ だから，後半が得られる．

補題 1 から $\sqrt{u(x-s)(1-u)(x-s)} = \sqrt{u(1-u)}(x-s)$ により

$$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\left(\int_0^t \frac{H(s)}{\sqrt{x-s}}ds\right)dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du \int_0^x H(s)ds$$

である．また $u = \sin^2\theta$ と変数変換すれば

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}}du = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}}d\theta = \pi$$

となるから，

$$H(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt\right)$$

となって $H(x)$ が求まる．よってアーベルの積分方程式は解ける．

このアーベルの積分方程式についての記述は [13] に従った．なお $(x-t)^{a-1}$ は $a<1$ のとき $t=x$ で不連続だが積分 $\int_0^x (x-t)^{a-1}dt$ は $a>0$ で収束するので，積分変換 $\int_0^x (x-t)^{a-1}dt$ は $a>0$ で意味がある．

この計算から $I^{1/2}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1}f(t)dt$ は $I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}f)(x) = I^1 f(x) = \int_0^x f(t)dt$ を満たす．このことは $I^{\frac{1}{2}}I^{\frac{1}{2}} = I^1$ とも書け $I^{\frac{1}{2}}f(x)$ は $f(x)$ の $\frac{1}{2}$ 回の不定積分と解釈できる．この形を見ると，$a>0$ のとき定数 C_a をうまく選べば

$$I^a f(x) = \frac{1}{C_a}\int_0^x (x-t)^{a-1}f(t)dt$$

が $f(x)$ の a 回の不定積分になると推測される．そのためには $I^aI^b = I^{a+b}$ が成立しなければならない．$I^a(I^bf)(x)$ を計算するのに補題 1 を用いれば

$$(x-t)^{a-1}(t-s)^{b-1}(x-s) = u^{a-1}(1-u)^{b-1}(x-s)^{a+b-1}$$

だから

$$
\begin{aligned}
I^a(I^b f)(x) &= \frac{1}{C_a C_b}\int_0^x (x-t)^{a-1}\left(\int_0^t (t-s)^{b-1} f(s)ds\right)dt \\
&= \frac{1}{C_a C_b}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du \int_0^x (x-s)^{a+b-1} f(s)ds
\end{aligned}
$$

となって

$$
\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = \frac{C_a C_b}{C_{a+b}} \tag{2.5}
$$

となるよう C_a が選ばれればよい．これまでの計算で $C_n = (n-1)!, C_{1/2} = \sqrt{\pi}$ となるはずだが，一般の a に対しそのような C_a はガンマ (Γ) 関数で与えられる．読者の便宜のため，次節でガンマ関数と後で使う級数，テイラー (Taylor) 展開について簡単に説明するが，知識のある読者は飛ばせばよい．

3　級数，テイラー展開，ガンマ関数

1．実(または複素)数 x の冪の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を冪級数，略して級数という．級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対し r, $0 \le r \le \infty$, が定まって $|x| < r$ であれば $f(x)$ は収束，$|x| > r$ であれば $f(x)$ は発散する．特に $r = \infty$ であればすべての x で $f(x)$ は収束する．r を $f(x)$ の収束半径という．領域 $-r < x < r$ で $f(x)$ は何回でも微分可能（C^∞-級）で

$$
f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad \frac{d^k f(x)}{dx^k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n x^{n-k}
$$

である．この式から $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ となる．$\phi(x)$ が C^∞-級であれば形式的に冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ができるが，これは必ずしも $\phi(x)$ を表さない．例えば $\phi(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$, $\phi(x) = 0$, $x \le 0$ とすれば $\phi(x)$ は C^∞-級で，すべての n について $\phi^{(n)}(0) = 0$ である．よって $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ となって $\phi(x)$

を表さない．原点の近傍で $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n$ となるとき $\phi(x)$ は原点の近傍でテイラー展開可能，または実解析的という．

重要な関数の多くはテイラー展開可能である．例えば $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ でこの右辺の級数は収束半径 ∞ である．この展開を使って行列 M の指数関数 e^M が $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ で定義される．さらに一般の作用素 T に対しても T^n が定義できれば形式的に $e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$ と書く．例えば $T = a\frac{d}{dx}$ であれば

$$e^{a\frac{d}{dx}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n f^{(n)}(x)}{n!}$$

である．この右辺は $f(x)$ が $r > |a|$ で収束するテイラー展開可能なとき意味があり $f(x+a)$ だから

$$e^{a\frac{d}{dx}} f(x) = \tau_a f(x), \quad \tau_a f(x) = f(x+a) \tag{3.1}$$

と解釈してよい．

同様に $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ のとき，$f(\frac{d}{dx}) = f(x)|_{x=\frac{d}{dx}}$ を $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d^n}{dx^n}$ で定義する．$f(\frac{d}{dx})$ は形式的な作用素だが $g(x)$ が多項式であれば $f(\frac{d}{dx})g(x)$ は意味がある．$g(x)$ が多項式でなくても $f(\frac{d}{dx})g(x)$ が意味をもつことはあり，そのような関数のクラスは $f(x)$ のテイラー展開の係数 $\{c_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ の $n \to \infty$ での増大度（減少度）によって決まる．

e^x 以外に次のテイラー展開も後で使う．

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n, \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

ここに出てくる級数の収束半径は a が 0 または正の整数の場合を除いて 1 である．

フーリエ展開など冪級数以外の関数の無限和 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)$ も重要だが省

略する．無限和に対し無限積

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} f_0(x)\cdot f_1(x)\cdots f_N(x)$$

もガンマ関数で使う．和が積に代わっただけだが，無限積の取り扱いは無限和より難しい．普通は $f_n(x) = 1+g_n(x)$ と書いて $\prod_{n=0}^{\infty}(1+g_n(x))$ の形に書き換え，収束は $\sum_{n=0}^{\infty}|g_n(x)|$ の収束問題に帰着させる．

2．$x > 0$ とする．x の階乗に当たるガンマ関数 $\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{3.2}$$

で定義される．$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$ であり部分積分で

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{3.3}$$

となるから，n が正の整数なら $\Gamma(n+1) = n!$ である．また変数変換 $t = s^2$ で

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt = 2\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}$$

と計算される．

ガンマ関数の積 $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} t^{x-1}s^{y-1}e^{-s-t}dtds$ は変数変換 $t = uv$, $s = u(1-v)$ により，積分領域は $\{(u,v)\,|\,u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}$ に移り $\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)} = -u$ だから

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^1\int_0^{\infty} e^{-u}(uv)^{x-1}\big(u(1-u)\big)^{y-1}ududv \\ &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\int_0^{\infty}e^{-u}u^{x+y-1}du \\ &= \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\Gamma(x+y)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.4}$$

となり (2.5) の C_a として $\Gamma(a)$ がとれる．なお (3.4) の左辺はベータ (B) 関数と呼ばれ，$B(x,y)$ と書かれる．

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ だから $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ だが，この右辺は $x>-1$, $x\neq 0$ で意味がある．これを続けると

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

となって，この右辺は x が負の整数でなければ $x>-n$ で意味がある．よってガンマ関数は 0 または負の整数以外のすべての実数に対して定義できる．また，こうして拡張されたガンマ関数について

$$\lim_{x\to -n}(x+n)\Gamma(x) = \lim_{x\to -n}\frac{\Gamma(x+n+1)}{x\cdots(x+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

が成り立つ．

補題 2　拡張されたガンマ関数は，極限

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x \tag{3.5}$$

で定義できる．

証明　$x>0$ のとき (3.2) と (3.5) が等しいことを示せばよい．

$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}$ だから

$$\lim_{n\to\infty}G_n(x) = \Gamma(x),\quad G_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dt$$

である．ここで $t=nu$ と変数変換すれば $G_n(x)=n^x\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ となる．$g_n(x)=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n du$ とおけば $g_0(x)=\frac{1}{x}$,

$$g_n(x) = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^n\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 u^x(1-u)^{n-1}du = \frac{n}{x}g_{n-1}(x+1)$$

となる．よって $G_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ となり，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x+n}=1$ だから (3.2) と (3.5) は等しい．

3. $\frac{k+x}{k}=1+\frac{x}{k}$ だから

$$n^{-x}\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(n-1)!} = n^{-x}x\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

である．しかし $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k}$ は発散するから無限積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{x}{k})$ は発散する．この発散を処理するため

$$n^{-x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{x}{k}\right)=e^{(-\log n+(1+\cdots+\frac{1}{n-1}))x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right)$$

と書き直してみる．

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n\right\}=\gamma=0.57721566490\cdots$$

はオイラー (Euler) 定数として知られているので

$$\lim_{n\to\infty}e^{(-\log n+(1+\cdots+\frac{1}{n-1}))x} = e^{\gamma x}$$

である．また $e^{-x/k}=1-\frac{x}{k}+\frac{x^2}{2k^2}e^{-\theta x/k}$ だから

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} = 1-\frac{x^2}{k^2}\left(1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-\theta x}{k}}\right)$$

だから $|\frac{x}{k}|<1$ であれば $(1+\frac{x}{k})e^{-\frac{x}{k}} = 1+r_k(x)$ とおいて $|r_k(x)|<\frac{(1+e)x}{k^2}$ である．よって無限積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{x}{k})e^{-x/k}$ は収束する．したがって

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{\gamma x}x\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right) \tag{3.6}$$

となる．この無限積はすべての x で収束する．この表示から $\Gamma(x)$ は 0 にならないことがわかる．

(3.6) から $\frac{1}{\Gamma(1+x)}=e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+\frac{x}{n})e^{-x/n}\right)$ だから

$$\log(\Gamma(1+x)) = -\gamma x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

である．$\log(1+\frac{x}{n})$ のテイラー展開は $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}x^m}{m\cdot n^m}$ だから

$$\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{m\cdot n^m}$$

である．よって $\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$ をリーマン (Riemann) のゼータ (ζ) 関数とすれば，後で重要な

補題 3 $\log(\Gamma(1+x))$ は $|x|<1$ で次のようにテイラー展開される．

$$\log(\Gamma(1+x)) = -\gamma x+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m\zeta(m)}{m}x^m \tag{3.7}$$

(3.7) から $\Gamma'(1)=-\gamma$ がわかる．これと $\Gamma'(x)=\int_0^{\infty}\log(t)t^{x-1}e^{-t}dt$ から $\int_0^{\infty}\log t\cdot e^{-t}dt=-\gamma$ も得られる．

(3.7) を見ると γ のところに $\zeta(1)$ が来てほしいが $\zeta(1)$ は発散する．しかし (3.6) での γ の出方を見ると，発散する無限積 $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{x}{k})$ を収束させるために入れた項から $\log n$, $n\to\infty$ の発散が抑えられて γ が現れる．その意味では (3.6), (3.7) の計算は，場の理論での "繰り込み" の原型と言えないこともない．

数の冪 x^a が背後で対数 $\log x$ に支配されているように，分数冪微積 $\frac{d^a}{dx^a}$ は背後で微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})$ で支配されている．ガンマ関数と数 γ は微分の対数で，通常の微分で指数関数と数 e が果たすような役割を果たす．例えば，変数変換 $x=e^t$ と t-空間の関数を その双対である s-空間の関数に移すラプラス変換で

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)\to\frac{d}{ds}+\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)}=\frac{1}{\Gamma(1+s)}\cdot\frac{d}{ds}\cdot\Gamma(1+s)$$

と移される [4]．ただし，この最後の式では $\Gamma(1+s)$ 等は積によって関数に働く掛け算作用素 $\Gamma(1+s):f(s)\to\Gamma(1+s)f(s)$ である．したがってガンマ関

数や γ の知識は分数冪微積の研究に欠かせないが未解決問題も多い．特に γ は e や π 同様 整数係数の代数方程式の根にならない超越数と思われているが，未だに有理数か無理数かさえわかっていない．数学での重要な未解決問題の一つである．

4　分数冪微分と微分の対数

1．定義 1　$a > 0$ とする．

$$I^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt \tag{4.1}$$

を $f(x)$ の（原点 0 からの）a 階の不定積分という．

$f(x)$ は $x > 0$ で定義され，そこで連続とする．$x \leq 0$ の場合の定義は後で述べる．また，c からの a 階不定積分 $I_c^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_c^x (x-t)^{a-1} f(t) dt$ も定義できるが，以下では使わない．

〔例〕　$f(x) = x^c$ であれば $t = ux,\ 0 \leq u \leq 1,$ と変数変換して

$$I^a x^c = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} t^c dt = \frac{x^{a+c}}{\Gamma(a)} \int_0^1 (1-u)^{a-1} u^c du$$

となるから，$c+1, a+c+1$ が負の整数でなければ

$$I^a x^c = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+c+1)} x^{a+c} \tag{4.2}$$

である．

命題 2　分数冪不定積分は関数の和と（複素）数によるスカラー積に関して線形で，次のことが成り立つ．

1. $I^a I^b = I^{a+b}$: f が連続なら $I^a(I^b f) = I^{a+b} f$.

2. $\frac{d^n}{dx^n}I^a = I^{a-n}, a > n$: f が連続で $a > n$ なら $\frac{d^n}{dx^n}I^a f = I^{a-n}f$.

3. $\lim_{a\downarrow 0} I^a = \mathrm{I}$, 恒等作用素 : f が微分可能なら $\lim_{a\downarrow 0} I^a f = f$.

ただし $\lim_{a\downarrow 0} g(a)$ は a が正の方から 0 に近づいたときの極限を表す.

証明 1 はすでに得られている. 2 は $a > 1$ と命題 1 から従う. f が微分可能なら

$$I^a f(x) = \left[-\frac{(x-t)^a}{a\Gamma(a)} f(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^a}{a\Gamma(a)} f'(t)dt$$

だから, $\lim_{a\downarrow 0} a\Gamma(a) = \lim_{a\downarrow 0} \Gamma(a) = 1$ により

$$\lim_{a\downarrow 0} I^a f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = f(x)$$

となって, 3 が得られる.

注意 $a > 1$ であっても

$$\begin{aligned} I^a\left(\frac{df(x)}{dx}\right) &= \left[\frac{(x-t)^{a-1}}{\Gamma(a)} f(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{a-2}}{\Gamma(a-1)} f(t)dt \\ &= -\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} f(0) + I^{a-1} f(x) \end{aligned}$$

だから $I^a \frac{d}{dx} \neq I^{a-1}$ である. このことは分数冪微分の定義に影響する.

定義 2 $a = n - c, 0 < c < 1, n$ は正の整数とする.

$$\frac{d^a}{dx^a} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^c f(x) \tag{4.3}$$

を $f(x)$ の a 階のリーマン - リウヴィル (Riemann-Liouville) 分数冪微分,

$$\frac{d^a}{dx^a} f(x) = I^c\left(\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right) \tag{4.4}$$

を $f(x)$ の a 階のカプト (またはカプト - リース (Caputo-Riesz)) 分数冪微分と呼ぶ.

カプト分数冪微分では $\frac{d^a}{dx^a}1=0$ だが (3.2) から $I^{1/2}1=\frac{1}{\Gamma(3/2)}x^{1/2}$ だから リーマン - リウヴィル分数冪微分では

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}1=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\neq 0$$

となり，この二つの定義は必ずしも一致しない．また $\frac{d^a}{dx^a}=I^{-a}$ となるべきだが，I^a を a が負の場合もこう定義すれば $I^aI^b=I^{a+b}$ は必ずしも成立しない．しかし

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+b+1)}x^{c+b}\right)=\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+b+1-n)}x^{c+b-n}$$

だから，リーマン - リウヴィル分数冪微分では

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c=\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-a+1)}x^{c-a} \tag{4.5}$$

が成立する．(4.2) と比べると $\frac{d^a}{dx^a}=I^{-a}$ という式になっている．

2．分数冪微分の定義が何種類もあるのは不都合なことが多いが，その難点は分数冪微分の定義域を負の実軸上では 0 となる関数に制限し微分の計算を以下に説明するように超関数の意味でおこなえば克服される．

$f(x)$ は $x>0$ で微分可能，$x<0$ で 0 とし，$\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)$ が存在するものとする．以下では $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=f(0)$ とする．$f(x)$ は $x=0$ では通常の意味では微分不能だが $g(x)$ を $|x|\to\infty$ で十分速く 0 に収束する連続関数とすれば

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)dx\\ &=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0}f(x+h)g(x)dx+\int_{0}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)dx\end{aligned}$$

だから

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)dx=f(0)g(0)+\int_{0}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}g(x)dx \tag{4.6}$$

である．積分の範囲を0を含む（境界でもよい）領域としても同じである．特に $f(x)$ をヘヴィサイド(Heaviside)関数 $Y(x)$; $Y(x)=1, x\geq 0, Y(x)=0, x<0$ とすれば，$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Y(x+h)-Y(x)}{h}g(x)dx=g(0)$ である．$Y(x)$ は原点で微分不能だが，この計算から $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dY(x)}{dx}g(x)dx$ は意味があるので，$\frac{dY(x)}{dx}=\delta(x)=\delta$ と書きディラック(Dirac)のデルタ関数と呼ぶ．δ は関数ではないが明確な意味をもち，シュワルツ(Schwartz)が導入した超関数(distribution)である．δ を使って

$$\frac{df_+}{dx}=\frac{df}{dx}+f(0)\delta \tag{4.7}$$

とおくと（$\frac{df}{dx}$ は f の導関数，$\lim_{x\downarrow 0}\frac{df}{dx}$ は存在するとする）(4.6) は

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df_+}{dx}g(x)dx \tag{4.8}$$

と書くことができる．なお $\frac{df_+}{dx}$ は f の超関数の意味での微分という．

補題 4　$a>1$ とすれば $I^a(\frac{df_+}{dx})=I^{a-1}f$ が成り立つ．

証明　命題2の後で注意したように $I^af'=-\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}f(0)+I^{a-1}f$ である．また

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x(x-t)^{a-1}\delta(t)dt=\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

だから $\frac{df_+}{dx}$ の定義から補題が成立する．

δ は関数ではないが，$g(x)$ が微分可能で $\boldsymbol{R}$ で可積分なら

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x+h)-\delta(x)}{h}g(x)dx=\lim_{h\to 0}\frac{g(-h)-g(0)}{h}=-g'(0)$$

だから，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)g(x)dx=-g'(0)$ としてよい．一般に δ の n 階の微分は n 階微分可能な $g(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n\delta}{dx^n}g(x)dx=(-1)^n\frac{d^ng}{dx^n}(0) \tag{4.9}$$

となる作用素として意味付けられる．δ の高階微分が定義できたので $f(x)$ が $x>0$ で何回でも微分でき（C^∞-級）すべての n について $\lim_{x\downarrow 0}\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{d^n f}{dx^n}(0)$ が存在すれば f の n 階の超関数の意味での微分 $\frac{d^n f_+}{dx^n}$ が定義できる．このとき補題1と同じ計算で

$$I^a\left(\frac{d^n f_+}{dx^n}\right)=I^{a-n}f \tag{4.10}$$

が成立する．まとめて

命題3　$f(x)$ が $x>0$ で C^∞-級，$f(x)=0, x<0$, かつ $\lim_{x\downarrow 0}\frac{d^n f(x)}{dx^n}=\frac{d^n f(0)}{dx^n}$ がすべての n について存在するとする．超関数の意味での微分を用いれば $f(x)$ のリーマン - リウヴィルの意味での分数冪微分とカプトの意味での分数冪微分は一致する．また $I^a=\frac{d^{-a}}{dx^{-a}}$ と書けて，こう書けば $\{I^a \mid a\in \boldsymbol{R}\}$ は1-径数群になる．

注意　命題3では分数冪微分の定義域を限定しているので，定数関数などは定義域に入らない．定数関数1はヘヴィサイド関数 $Y(x)$ に置き換えられている．一方，超関数の意味での微分を使えばディラック関数 δ など関数でない超関数が現れる．そのため命題3が成立するような分数冪微分の定義域をはっきりさせるには超関数 ([8])，あるいは正の実軸上の超関数に当たるミクシンスキ (Mikusinski) の演算子 ([9]) が必要になる．しかしこれらについて説明するのはこの小論の程度を越えるので割愛する．

上の注意で述べたように，命題3を物理や工学の問題に適用するには制約があり，むしろリーマン - リウヴィル分数冪微分やカプト分数冪微分の方が実用的には使われることが多い．しかし以下の議論では命題3が使えるような範囲で分数冪微分を扱う．

3．平行移動の群 $\{\tau_a \mid a\in \boldsymbol{R}\}$ のように $\boldsymbol{R}$ をパラメータとする可換群 $G=\{g_t \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, $g_t g_s=g_{t+s}$, を1-径数群という．g_t が t について微分可能

なとき，恒等作用素をIと書いて

$$\mathsf{A}=\lim_{h\to 0}\frac{g_h-\mathrm{I}}{h},\quad \mathrm{I}=g_0$$

を G の生成作用素という．生成作用素があれば $g_t=e^{t\mathsf{A}}$ である．

1-径数群 $\{I^a\,|\,a\in\boldsymbol{R}\}$ の生成作用素 $\frac{d}{da}I^a|_{a=0}=A$ は不定積分の対数，$-A$ は微分の対数と解釈される．A を計算するため $I^a f=I^{a+1}(\frac{df_+}{dx})$ を使う．そうすれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}I^a f(x) &= \frac{d}{da}\left(\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^x (x-t)^a\frac{df_+(t)}{dt}dt\right)\\ &= \frac{-\Gamma'(a+1)}{(\Gamma(a+1))^2}\int_0^x (x-t)^a\frac{df_+(t)}{dt}dt+\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^x \log(x-t)(x-t)^a\frac{df_+(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

だから $\Gamma'(1)=-\gamma$ により

$$Af(x) = \gamma f(x)+\int_0^x \log(x-t)\frac{df_+(t)}{dt}dt \tag{4.11}$$

である．

定義 3 $f(x)$ が $x>0$ で微分可能で $\lim_{x\downarrow 0}\frac{df(x)}{dx}$ が存在するとき，微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})$ を

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) &= -\left(\gamma f(x)+\int_0^x \log(x-t)\frac{df_+(t)}{dt}dt\right) &(4.12)\\ &= -(\log x+\gamma)f(x)-\int_0^x \log\left(1-\frac{t}{x}\right)\frac{df_+(t)}{dt}dt &(4.13)\end{aligned}$$

で定義する．

A が $\frac{dI^a}{da}=AI^a$ を満たすから $I^0=\mathrm{I}$, 恒等作用素, により $e^{aA}=I^a$ である．よって

$$e^{a\log(\frac{d}{dx})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\log\left(\frac{d}{dx}\right)\right)^n=\frac{d^a}{dx^a} \tag{4.14}$$

が成立する.

(4.12) の方が形はきれいだが, $|t|<|x|$ では $\log(1-\frac{t}{x})$ のテイラー展開が使えるので, 実際の計算には (4.13) の方が便利なことが多い ([2],[3],[10] 参照).

〔例〕 $c>0$ とする. $Ax^c=-\log(\frac{d}{dx})x^c$ だから (4.13) により

$$\begin{aligned} Ax^c &= (\log x+\gamma)x^c+\int_0^x \log\Big(1-\frac{t}{x}\Big)(ct^{c-1})dt \\ &= (\log x+\gamma)x^c-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{nx^n}\int_0^x t^{n+c-1}dt \end{aligned}$$

となって

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)x^c=-\log x\cdot x^c-\Big(\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n(n+c)}\Big)x^c$$

である. 特に c が正の整数 m のとき $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{n(n+m)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m})$ だから

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)x^m=-\log x\cdot x^m+\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\gamma\Big)x^m$$

である.

同様に (4.13) を使えば手間はかかるが

$$\begin{aligned} \log\Big(\frac{d}{dx}\Big)(\log x)^n &= -(\log x+\gamma)(\log x)^n+ \\ &\quad +\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}n!\zeta(n-k+1)}{k!}(\log x)^k \qquad (4.15) \end{aligned}$$

が得られる. この式は複雑だが, 無限階の微分作用素

$$\partial_{\log,X}=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(n+1)\frac{d^n}{dX^n}$$

を導入すれば

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)(\log x)^n=(-X+\partial_{\log,X})X^n|_{X=\log x}$$

と簡単に書ける．さらに $\log(\Gamma(1+X))$ のテイラー展開 (3.7) を使えば

$$\eth_{\log,t} = \frac{d}{dX}\log(\Gamma(1+X))\Big|_{X=\frac{d}{dt}} \tag{4.16}$$

と書ける．$\log(\frac{d}{dx})$ は線形だから，これから

補題 5 変数変換 $\log x = t$ によって

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)\Big|_{\log x = t} = -t + \eth_{\log,t} \tag{4.17}$$

となる．

5 分数冪微分の他の定義

1．平行移動作用素 $\tau_a : \tau_a f(x) = f(x+a)$ は 3 節 (3.1) で触れたが，分数冪微分と微分の対数の関係が変数変換，ラプラス変換，ガンマ関数によるゲージ変換を組み合わせれば 平行移動と微分の関係に移るというのが この小論のゴールなので，改めて平行移動と微分の関係をまとめておく．

命題 4 $\frac{d}{da}(\tau_a) = \frac{d}{dx}\cdot\tau_a$ である．よって

$$\log(\tau_a) = a\frac{d}{dx}, \quad e^{a\frac{d}{dx}} = \tau_a \tag{5.1}$$

が適当な関数のクラスに対して成り立つ．

証明 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\tau_{a+h}-\tau_a}{h}f(x) = \frac{df(x+a)}{dx}$ だから $\frac{d}{da}(\tau_a) = \frac{d}{dx}\cdot\tau_a$ が成り立つ．したがって $\frac{d}{dx}$ は 1-径数群 $\{\tau_a \mid a \in \boldsymbol{R}\}$ の生成作用素になって (5.1) が成り立つ．

系 $(\tau_a)^b = \tau_{ab}$ である．

通常の微分は $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\tau_h - \mathrm{I}}{h}$ と τ_a で書ける．また $\tau_h - \mathrm{I} = \tau_h(\mathrm{I}-\tau_{-h})$ だから

$$(\tau_h - \mathrm{I})^{-1} = \tau_{-h}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{-nh}$$

と形式的に定義すれば，適当な積分可能条件を満たす $f(x)$ に対し

$$\lim_{h\to 0} h(\tau_h - \mathrm{I})^{-1} f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, & h>0 \\ \displaystyle -\int_{x}^{\infty} f(t)dt, & h<0 \end{cases}$$

となる．したがって，不定積分も平行移動作用素を使って

$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tau_h - \mathrm{I}}{h}\right)^{-1} f(x),\ h>0,$ と書ける．

$\lim_{h\to 0} h(\tau_h - \mathrm{I})^{-1}$ は h の符号で違う．そのような煩雑さを避けるため以下では $h>0$ とする．$(1-x)^a$, $\log(1-x)$ のテイラー展開を使って

$$(\tau_h - \mathrm{I})^a = \tau_{ah}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\tau_{-nh}\right),$$

$$\log(\tau_h - \mathrm{I}) = h\frac{d}{dx} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tau_{-nh}$$

と定義する．この定義を使って

$$\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\tau_h - \mathrm{I})^a}{h^a}f(x),$$

$$\log\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x) = \lim_{h\to 0}\left(\log(\tau_h - \mathrm{I}) - \log h\right)f(x)$$

と定義する．a が正の整数 n なら $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} = \frac{d^n}{dx^n}$ である．また

$$\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}\frac{\mathrm{d}^b}{\mathrm{d}x^b} = \frac{\mathrm{d}^{a+b}}{\mathrm{d}x^{a+b}}, \quad \frac{d}{da}\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a} = \log\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}$$

が成り立つ．この2番目の式から $e^{a\log(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})} = \frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}$ が成立する．また $\tau_h = e^{a\frac{d}{dx}}$ だから，$G(X) = \frac{1-e^{-X}}{X}$ とすれば

$$\log(\tau_h - \mathrm{I}) = h\frac{d}{dx} + \log h + \log\left(\frac{d}{dx}\right) + \log\left(G\left(h\frac{d}{dx}\right)\right)$$

である．よって $\log(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) = \log(\frac{d}{dx})$ となり，これから $\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a} = \frac{d^a}{dx^a}$ が得られる．まとめて

命題 5 $\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}f(x)$, $\log(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f(x)$ が定義できれば

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\tau_h-\mathrm{I})^a}{h^a}f(x) \;=\; \frac{d^a}{dx^a}f(x), \tag{5.2}$$

$$\lim_{h\to 0}\Big(\log(\tau_h-\mathrm{I})-\log h\Big)f(x) \;=\; \log\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x) \tag{5.3}$$

が成立する．ただし $h>0$ とする．

しかし $\frac{\mathrm{d}^a}{\mathrm{d}x^a}$ が定義できる適切な関数のクラスは，まだわかっていないようである．

注意 $(\tau_h-\mathrm{I})^a$ は a が 0 または正の整数のときに限り有限和である．これからも $\frac{d^a}{dx^a}$ が a が 0 または正の整数のときに限り局所的[1]なことがわかる．分数冪微分が局所的でないというのは多様体の上などで分数冪微分を考えるときの難点になるが，局所的でないということを利用しようという試みもある．

株価変動がブラウン運動的だというのはバシェリエ (Bachelier) が 1900 年に指摘し金融工学の基礎になっているが，「将来のことは現在の事象だけで決まり過去の影響は受けない」というブラウン運動のマルコフ性を 過去の記憶の影響を排除できない証券投資に適用するのは無理があるのではないかという疑問はある．そこで「記憶の影響を取り入れるのに局所的な整数階の微分を局所的でない分数冪微分に置き換えよう」というのが金融工学で分数冪微分が使われるようになった理由である．ただこういう試みは現象論であることも注意すべきだろう．

2. 平行移動作用素 τ_h を使って分数冪微分を定義するのは自然だが，その定義に従って計算するのは困難である．それに対し積分変換による定義は実用的な場合がある．以下ではその例としてラプラス変換による定義を述べる．

---

1) $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$ は $f(x)$ の a の近傍だけで決まり，a から離れた点の影響は受けない．

普通ラプラス変換は，正の実軸上の関数 $f(x)$ に対し

$$\mathcal{L}[f](t) = \int_0^\infty e^{-xt} f(x)dx \tag{5.4}$$

で定義される．定義から $f(x)$ の $x \to \infty$ での増大度が多項式程度なら

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}[f](t) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{-xt} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-xt}\big(-xf(x)\big)dx$$

である．また

$$t\mathcal{L}[f](t) = \int_0^\infty \Big(-\frac{d}{dx}e^{-xt}\Big) f(x)dx = \Big[-e^{-xt}f(x)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-xt}f'(x)dx$$

だから，$f(x)$ の $x \to \infty$ での増大度が多項式程度で $f(0) = 0$ なら $t\mathcal{L}[f](t) = \mathcal{L}[f'](t)$ も成り立つ．数理工学などでラプラス変換が使われるのは定数係数常微分作用素 $P(\frac{d}{dt}) = \sum_{k=0}^n c_k \frac{d^k}{dt^k}$ の作用がラプラス変換を通して

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[P(-x)f(x)](t), \quad P(-x) = \sum_{k=0}^n C_k(-x)^k$$

と多項式による掛け算に替わることを利用する場合が多い．具体的には，$v(t) = \mathcal{L}[g(x)](t)$ であれば，方程式 $P(\frac{d}{dt})u(t) = v(t)$ の解は形式的に

$$v(t) = \mathcal{L}[\frac{g(x)}{P(-x)}](t)$$

となるから，$P(\frac{d}{dt})u(t) = v(t)$ を解く問題は "$\frac{g(x)}{P(-x)}$ のラプラス変換が定義できるか？ できた場合どう計算するか" という問題に帰着される．

注意　上の議論では $P(\frac{d}{dt})u(t) = v(t), v(t) \neq 0,$ を解く問題しか扱っていない．方程式 $P(\frac{d}{dt})u(t) = 0$ の解をラプラス変換で求めるには，超関数 $\delta_c = \tau_{-c}\delta;$ $\int_\alpha^\beta f(x)\delta_c(x)dx = f(c), \alpha \le c \le \beta,$ を使う．定義から

$$\mathcal{L}[\delta_c](t) = e^{-ct}, \quad \mathcal{L}[f(x)\delta_c] = 0,\ f(c) = 0$$

である．これから $P(-\lambda)=0$ なら $P(\frac{d}{dt})\mathcal{L}[\delta_\lambda](t)=0$ で $\mathcal{L}[\delta_\lambda](t)=e^{-\lambda t}$ となり，よく知られた $P(\frac{d}{dt})e^{\mu t}=0, P(\mu)=0$ が再現される．このようにラプラス変換を超関数に対しても定義することは重要だが，この小論の程度を超えるので以下ではラプラス変換は関数に対して定義されているものとする．

分数冪微分や微分の対数もラプラス変換を使って

$$
\begin{aligned}
\frac{d^a}{dt^a}\mathcal{L}[f(x)](t) &= \mathcal{L}[(-x)^a f(x)](t), \\
\log\left(\frac{d}{dx}\right)\mathcal{L}[f(x)](t) &= \mathcal{L}[\log(-x)f(x)](t)
\end{aligned}
$$

と定義すればよい．ただこの定義では $(-x)^a$ や $\log(-x)$ をどう決めるかが問題になる．オイラーの公式で $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ だから $-1=e^{\pm\pi i}$ だが，ここでどちらをとるかを決める合理的な理由はない．

定義 4　$x>0$ のとき

$$
(-x)^a_\pm = e^{\pm i a\pi}x^a, \quad \log(-x)_\pm = \log x \pm i\pi \tag{5.5}
$$

とおき

$$
\frac{d^a}{dt^a}_\pm\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[(-x)^a_\pm f(x)](t), \tag{5.6}
$$

$$
\log\left(\frac{d}{dt}\right)_\pm\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[\log(-x)_\pm f(x)](t) \tag{5.7}
$$

と定義する．

こう定義しなければならないのは $f(x)$ は正の実軸上で定義されていても $\mathcal{L}[f(x)](t)$ は負の実軸上でも定義されている可能性があるからである．なお

$$
e^{a\log(-x)_\pm} = (-x)^a_\pm
$$

であることを注意しておく．これに対し $f(x)$ は正の実軸上で定義されているので（$f(0)=0$ といった条件を満たせば）

$$t^a\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[\frac{d^a}{dx^a}f(x)](t) \tag{5.8}$$

$$\log t\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[\log\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)](t) \tag{5.9}$$

が成り立つ.

しかし後での便宜のため，以下ではラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(x)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}f(x)dx \tag{5.10}$$

で定義されたものとする．次の補題は後で使う.

補題 6　$\lim_{x\to\pm\infty} e^{tx}f(x) = 0$ であれば (5.10) で定義されたラプラス変換について

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[xf(x)](t), \tag{5.11}$$

$$t\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[-\frac{df(x)}{dx}](t), \tag{5.12}$$

$$e^{at}\mathcal{L}[f(x)](t) = \mathcal{L}[\tau_{-a}f(x)](t) \tag{5.13}$$

が成り立つ.

証明　(5.11) と (5.12) は通常のラプラス変換と同じ計算で証明される．変換の核が e^{xt} になっているので通常の場合と符号が逆になっている.

$$e^{at}\mathcal{L}[f(x)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+a)t}f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}f(y-a)dy$$

となるから (5.13) が得られる．なお $e^{at}\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[e^{-a\frac{d}{dx}}f]$ からも (5.13) が証明される.

注意　$e^{at}\int_0^\infty e^{-xt}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(x-a)t}f(t)dt = \int_{-a}^\infty e^{-yt}f(y-a)dy$ だから，通常のラプラス変換では (5.13) に当たる式は成り立たない.

ラプラス変換の逆も積分変換だが，それを説明するには関数論の知識がいるので割愛する.

6 ライプニッツの公式とその応用

1. ライプニッツの公式 $\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^n f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$ は微分を特徴付ける式として重要である.

分数冪微分のライプニッツの公式を求めるため，最初に $I^1 = \frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ の場合を考える．この場合 g が何回でも微分できれば，部分積分を繰り返して

$$\int_0^x f(t)g(t)dt = (I^1 f)(x)g(x) - \int_0^1 (I^1 f)(t)\frac{dg(t)}{dt}dt$$
$$= (I^1 f)(x)g(x) - I^2 f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \int_0^x I^2 f(t)\frac{d^2 g(t)}{dt^2}dt = \cdots =$$
$$= (I^1 f)(x)g(x) - I^2 f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \cdots + (-1)^n \int_0^x I^n f(t)\frac{d^n g(t)}{dt^n}dt$$

である．$f(x)$ が連続なら $|f(t)| \leq M,\ 0 \leq t \leq x$, となる $M > 0$ が存在し

$$|I^m f(t)| \leq \frac{Mx^m}{m!}, \quad 0 \leq t \leq x$$

だから，例えば $f(x)$ が指数 $\alpha < 1$ のジェヴレ (Gevrey) 級関数：

$$\left|\frac{d^m g(x)}{dx^m}\right| \leq M_x (m!)^\alpha, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

であれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I^n f(x)| \left|\frac{d^{n-1} g(x)}{dx^n}\right| < \sum_{n=1}^{\infty} M \cdot M_x |x|^n \frac{1}{(n!)^{1-\alpha}} < \infty$$

となって

$$I^1(fg)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (I^n f)(x) \frac{d^{n-1} g(x)}{dx^{n-1}} \tag{6.1}$$

である．(6.1) は f, g について対称でないが $I^1 = \frac{d^{-1}}{dx^{-1}}$ についてのライプニッツの公式と見なされる．

一般の a について I^a のライプニッツの公式を得るために x をパラメータと見て

$$f_a(t) = \frac{(x-t)^{a-1}}{\Gamma(a)} f(t)$$

とおく．そうすれば

$$\begin{aligned} I^n(f_a)(x) &= \frac{1}{(n-1)!\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a+n-2} f(t)dt \\ &= \frac{\Gamma(n+a-1)}{(n-1)!\Gamma(a)} I^{a+n-1} f(x) \end{aligned}$$

である．f が連続，g が指数 $\alpha < 1$ のジェヴレ級関数であれば，これを

$$I^1(f_a g)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} I^n(f_a)(x) \frac{d^{n-1}g(x)}{dx^{n-1}}$$

に代入して

$$\begin{aligned} &I^a(fg)(x) \\ &= (I^a f)(x)g(x) - a(I^{a+1}f)(x)\frac{dg(x)}{dx} + \cdots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n+a-1)}{(n-1)!\Gamma(a)} (I^{a+n-1}f)(x) \frac{d^{n-1}g(x)}{dx^{n-1}} + \cdots \end{aligned} \tag{6.2}$$

である．

(6.2) の係数は $(1+x)^{-a}$ の二項展開の係数である．このことと $\frac{d}{dx}I^a = I^{a-1}$ から

定理 2　$f(x)$ が連続，$g(x)$ が指数 $\alpha < 1$ のジェヴレ級関数なら

$$\begin{aligned} &\frac{d^a}{dx^a}(f(x)g(x)) \\ &= \frac{d^a f(x)}{dx^a} g(x) + a \frac{d^{a-1} f(x)}{dx^{a-1}} \frac{dg(x)}{dx} + \cdots + \\ &\quad + \frac{\Gamma(a+1)}{(n-1)!\Gamma(a-n+2)} \frac{d^{a-n+1} f(x)}{dx^{a-n+1}} \frac{d^{n-1}g(x)}{dx^{n-1}} + \cdots \end{aligned} \tag{6.3}$$

である．

系　$f(x)$, $g(x)$ について同じ仮定で

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)(f(x)g(x)) = \left(\log\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(I^n f(x)\right)\frac{d^n g(x)}{dx^n} \tag{6.4}$$

が成立する.

証明　$\frac{d}{da}\frac{d^a}{dx^a} = \log\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^a}{dx^a}$ だから, (6.3) の両辺を

$$\frac{\Gamma(a+1)}{(n-1)!\Gamma(a-n+2)} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+2)}{(n-1)!}$$

に注意して a で微分すれば

$$\begin{aligned}&\left(\log\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^a}{dx^a}\right)(fg)\\ &= \left(\log\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^a f}{dx^a}\right)g + \frac{d^{a-1}f}{dx^{a-1}}g + a\left(\frac{d}{da}\frac{d^{a-1}f}{dx^{a-1}}g\right) + \\ &\quad + \frac{(a-1)\cdots(a-n+2)}{(n-1)!}\frac{d^{a-n+1}f}{dx^{a-n+1}}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + \\ &\quad + a\left(\frac{d}{da}\left(\frac{(a-1)\cdots(a-n+2)}{(n-1)!}\frac{d^{a-n+1}f}{dx^{a-n+1}}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right)\right) + \cdots\end{aligned}$$

となる. そこで $a \to 0$ とすれば系が得られる.

2. (6.3), (6.4) は（a が 0 または正の整数でなければ）f, g について対称ではないし g には強い制約がある. しかし $f(x) = 1 \cdot f(x)$ と

$$\begin{aligned}\frac{d^{a-n}}{dx^{a-n}}1 &= \frac{1}{\Gamma(n+1-a)}x^{n-a},\\ \log\left(\frac{d}{dx}\right)1 &= -(\log x + \gamma), \quad I^n(1) = \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

を用いれば, 次のように分数冪微分や微分の対数を無限階の微分作用素として表すことができる [2].

定理 3　$f(x)$ を指数が $\alpha < 1$ のジェヴレ級関数，a は 0 または正の整数ではないとすれば

$$\frac{d^a f(x)}{dx^a} = \frac{x^{-a}}{\Gamma(1-a)}\left(f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{(n-a)n!}\left(x^n \frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)\right), \quad (6.5)$$

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) = -(\log x + \gamma)f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}\left(x^n \frac{d^n}{dx^n}\right)f(x) \quad (6.6)$$

と表される．

この定理は奇妙な感じがするかも知れないが，数の場合でも $\sqrt{1+x}$ が $|x| < 1$ なら二項展開で x の整数冪だけで計算できるのと同じである．

a が正の整数のとき (6.5) の右辺は意味がないが

$$\lim_{a \to m} \frac{(-1)^{n-1}a}{\Gamma(1-a)(n-a)n!} = 0, \quad n \neq m$$

と $\lim_{x \to -m}(x+m-1)\Gamma(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$ により $x > 0$ で各点収束の意味で

$$\lim_{a \to m} \frac{x^{-a}}{\Gamma(1-a)}\left(f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}a}{(n-a)n!}\left(x^n \frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)\right) = \frac{d^m f(x)}{dx^m}$$

となる．

3．分数冪微分や微分の対数が負の実軸上で定義されている関数に対してはうまく定義できないのは，x^a や $\log x$ が複素数の関数として全平面上では一価でないことによる．(6.5), (6.6) の右辺を見ると x^{-a} と $\log x$ の多価性だけが分数冪微分や微分の対数を負の実軸上で定義された関数に対して定義する上での障害になっていることがわかる．

(6.5), (6.6) を使えば適用範囲は狭いが $\frac{d^a}{dx^a}{}_{\pm}$, $\log(\frac{d}{dx})_{\pm}$ に対しラプラス変換を使った定義 4 とは見かけ上違った形の定義を与えることができる．

定義 5　$x_{\pm}^a$, $\log x_{\pm}$ は (5.5) と同じ ($x > 0$ では $x_{\pm}^a = x^a$, $\log x_{\pm} = \log x$) と

する．$f(x)$ が実軸上で定義された指数 $\alpha<1$ のジェヴレ級関数のとき

$$\frac{d^a}{dx^a}_{\pm}f(x) = \frac{x_{\pm}^{-a}}{\Gamma(1-a)}\left(f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a}{(n-a)n!}\left(x^n\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right)\right), \quad (6.7)$$

$$\log\left(\frac{d}{dx}\right)_{\pm}f(x) = -(\log x_{\pm}+\gamma)f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}\left(x^n\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right) \quad (6.8)$$

と定義する．

(6.5), (6.6) の右辺は無限階の微分作用素だが，微分 $\frac{d^n}{dx^n}$ の無限級数というよりオイラー微分 $x^n\frac{d^n}{dx^n}$ の無限級数である．そして分数冪オイラー微分

$$x^a\frac{d^a}{dx^a}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)}\left(f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-a)n!}\left(x^n\frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)\right)$$

の右辺は，整数階オイラー微分の定数係数の無限級数である．また

$$\left(\log\left(\frac{d}{dx}\right)+\log x\right)f(x) = \gamma f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}\left(x^n\frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)$$

の右辺も整数階オイラー微分の無限級数になっている．整数階オイラー微分について次の補題はよく知られている．

補題 7　変数変換 $x=e^t$ によって n 階のオイラー微分は

$$x^n\frac{d^n}{dx^n}\Big|_{x=e^t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}-1\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-n+1\right) \quad (6.9)$$

となる．

証明　$n=1$ のとき補題は正しい．$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(xf) = x\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+(n-1)\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}$ だから

$$x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x\frac{d}{dx}\right) = x^n\frac{d^n}{dx^n}+(n-1)x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$$

である．これから $x^n\frac{d^n}{dx^n} = x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}-n+1$ となって，帰納法により補題が得られる．

定義 6　$x^a\frac{d^a}{dx^a}$ を（a 階の）分数冪オイラー微分と呼ぶ.

補題 7 から分数冪オイラー微分 $x^a\frac{d^a}{dx^a}$ と $\log(\frac{d}{dx})+\log x$ は変数変換 $x=e^t$ で無限階の定数係数微分作用素に変換されることが推測される．補題 5 はこの推測が $\log(\frac{d}{dx})+\log x$ については正しいことを示している．実際この推測は分数冪オイラー微分についても正しいが，それは次節で示す．以下では，その準備として $x^a\frac{d^a}{dx^a}$ と $\log(\frac{d}{dx})+\log x$ の簡単な性質を述べる.

(6.5), (6.6) から $x^a\frac{d^a}{dx^a}$, $\log(\frac{d}{dx})+\log x$ はともに実軸上の 指数が 1 以下のジェヴレ級関数に対して定義できる．また

$$x^a\frac{d^a}{dx^a}\left(x^b\frac{d^b}{dx^b}x^c\right) = x^a\frac{d^a}{dx^a}\left(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-b)}x^c\right)$$
$$= \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-b)}\left(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^c\right) = x^b\frac{d^b}{dx^b}\left(x^a\frac{d^a}{dx^a}x^c\right)$$

が任意の c で成立するから,

$$x^a\frac{d^a}{dx^a}\left(x^b\frac{d^b}{dx^b}\right) = x^b\frac{d^b}{dx^b}\left(x^a\frac{d^a}{dx^a}\right) \tag{6.10}$$

である．一方，上の計算からわかるように

$$x^a\frac{d^a}{dx^a}\left(x^b\frac{d^b}{dx^b}\right) \neq x^{a+b}\frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$$

だから，$\{x^a\frac{d^a}{dx^a}\mid a\in\boldsymbol{R}\}$ は 1-径数群にはならない．しかし

$$\frac{d}{da}\left(x^a\frac{d^a}{dx^a}\right) = \log x\left(x^a\frac{d^a}{dx^a}\right) + x^a\log\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^a}{dx^a}$$

だから，$\log(\frac{d}{dx})+\log x$ は分数冪オイラー微分の対数のような作用素である.

7 分数冪オイラー微分の変数変換とラプラス変換

1. 定義 7 作用素 ∂_a, $\partial_{\log}$ を

$$x^a \frac{d^a}{dx^a}\Big|_{x=e^t} = \partial_a, \quad \left(\log\left(\frac{d}{dx}\right) + \log x\right)\Big|_{x=e^t} = \partial_{\log} \qquad (7.1)$$

で定義する．どの変数に働くかをはっきりさせる必要があるときは $\partial_{a,t}$, $\partial_{\log,t}$ などと書く．定義から

$$\frac{d^a}{dx^a}\Big|_{x=e^t} = e^{-at}\partial_a, \quad \log\left(\frac{d}{dx}\right)\Big|_{x=e^t} = -t + \partial_{\log}$$

である．

$\partial_{\log}$ はすでに (4.17) で定義されていて $\partial_{\log} = \frac{d}{dX}\log(\Gamma(1+X))|_{X=\frac{d}{dt}}$ も示されている．

定理 4 $f(t) = F(e^t)$ で $F(x)$ が十分速く収束する冪級数なら

$$\partial_a f(t) = \frac{\Gamma(1+X)}{\Gamma(1+X-a)}\Big|_{X=\frac{d}{dt}} f(t) \qquad (7.2)$$

である．

証明 $f(t) = e^{ct}$ であれば $F(x) = x^c$ だから (4.5) により

$$x^a \frac{d^a}{dx^a} x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^c$$

である．一方

$$\frac{\Gamma(1+X)}{\Gamma(1+X-a)}\Big|_{X=\frac{d}{dt}} e^{ct} = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} e^{ct}$$

だから

$$\partial_a e^{ct} = \frac{\Gamma(1+X)}{\Gamma(1+X-a)}\Big|_{X=\frac{d}{dt}} e^{ct}$$

である．$\partial_{\log}$ は線形で c が大きいとき $|\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}| \leq 2c^a$ が成立するから，$f(t) = \sum_n c_n e^{nt}$ なら (7.2) が成立する．よって定理が得られる．

注意　この証明から (7.1) が成立する $f(t)$ は整級数から得られる $\sum_n c_n e^{nt}$ の形でなくても $\int e^{st} g(s) ds$ の形でもよいことがわかる(中西氏はこの積分変換を使って定理 4 を証明した)．この形の積分変換はすぐ後で現れる．

この場合，分数冪微分と積分の順序交換が必要だが，それには $g(s)$ が $|g(s)| < Me^{C|s|^{\alpha}}$, $M, C > 0$, $\alpha > 1$, と評価されることが十分である．

a が正の整数 n のとき

$$\Gamma(1+X) = X\Gamma(X) = \cdots = X(X-1)\cdots(X-n+1)\Gamma(X-n+1)$$

だから

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1+X)}{\Gamma(1+X-n)}\Big|_{X=\frac{d}{dt}} &= \big(X(X-1)\cdots(X-n+1)\big)\big|_{X=\frac{d}{dt}} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)\cdots\Big(\frac{d}{dt}-n+1\Big)\end{aligned}$$

となって，補題 7 が得られる．定理 4 の証明を入れても，この証明の方が補題 7 での (6.9) の証明より簡単だと感じられた読者も少なくないと思う．

また

$$\frac{d}{da}\Big(\frac{d^a}{dx^a}\Big|_{x=e^t}\Big) = \frac{d}{da}\big(e^{-at}\mathfrak{d}_a\big)$$

から

$$\Big(\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\frac{d^a}{dx^a}\Big)\Big|_{x=e^t} = -te^{-at}\mathfrak{d}_a + e^{-at}\frac{d}{da}\mathfrak{d}_a$$

である．ここで $a \to 0$ とすれば $\mathfrak{d}_0 = \mathrm{I}$ だから

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\Big|_{x=e^t} = -t + \frac{d}{da}\mathfrak{d}_a\Big|_{a=0}$$

である．ここで (7.2) を使うと

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_{\log} &= \Big(\frac{d}{da}\Big(\frac{\Gamma(1+X)}{\Gamma(1+X-a)}\Big)\Big|_{X=\frac{d}{dt}}\Big)_{a=0} \\ &= \Big(\Big(\frac{\Gamma(1+X)\Gamma'(1+X)}{\Gamma(1+X-a)^2}\Big)\Big|_{X=\frac{d}{dt}}\Big)\Big|_{a=0} = \frac{\Gamma'(1+X)}{\Gamma(1+X)}\Big|_{X=\frac{d}{dt}}\end{aligned}$$

となって (4.17) が得られる.

補題 5 では (4.15) から $\log(\Gamma(1+x))$ のテイラー展開 (3.7) を使って (4.17) を導いた. しかし (4.15) の計算は簡単ではない. それより上記のように (4.17) を定理 4 から導いて $\log(\Gamma(1+s))$ のテイラー展開を利用する方が, (4.15) を示すには簡単である.

2. $t=\log x$ だから $0<x<\infty$ は $-\infty<t<\infty$ に移る. s-空間を t-空間の双対空間とし, それらの上の関数の間のラプラス変換を (5.10) と同じ

$$\mathcal{L}[f(s)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} f(s)ds$$

とする. (7.2), (4.17) と補題 6 から

定理 5 $f(s)$ が $|s|\to\infty$ で十分速く 0 に近づけば

$$e^{-at}\partial_{a,t}\mathcal{L}[f(s)](t) = \mathcal{L}[\tau_a\Big(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\Big)f(s)](t), \tag{7.3}$$

$$(-t+\partial_{\log,t})\mathcal{L}[f(s)](t) = \mathcal{L}[\Big(\frac{d}{ds}+\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)}\Big)f(s)](t) \tag{7.4}$$

が成り立つ.

注意 定理 4 の後で (7.2) から (4.17) を導いた. 逆に, 少し厳密ではないが下記のように (4.17) から (7.2) を導くこともできる.

(4.17) から (7.4) が得られるが, 方程式 $\frac{dY(s)}{ds}+\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)}Y(s)=0$ の解は $Y(s)=\frac{C}{\Gamma(1+s)}$, C は定数, である. これと $\frac{d^a}{dx^a}=e^{a\log(\frac{d}{dx})}$ により ($\mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(1+s)}]$ が定義できれば)

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(1+s)}](\log x) = \mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(1+s)}](\log x)$$

となる. したがって $\partial_a\mathcal{L}[f(s)]=\mathcal{L}[F_a(s)f(s)]$ とおけば

$$\mathcal{L}[\tau_a\Big(\frac{F_a(s)}{\Gamma(1+s)}\Big)] = \mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(1+s)}]$$

となって $F_a(s)=\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}$ が得られる．

補題 8　$\Gamma(1+s)$ 等を s-空間の関数に掛け算で働く作用素：$\Gamma(1+s):f(s)\to\Gamma(1+s)f(s)$, とすれば

$$\tau_a\Big(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\Big) = \Gamma(1+s)^{-1}\cdot\tau_a\cdot\Gamma(1+s), \tag{7.5}$$

$$\frac{d}{ds}+\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)} = \Gamma(1+s)^{-1}\cdot\frac{d}{ds}\cdot\Gamma(1+s) \tag{7.6}$$

である．

証明　$g(s)$ が掛け算作用素であれば

$$\tau_a\big(g(s)f(s)\big)=g(s+a)f(s+a)=g(s+a)\tau_a f(s)$$

だから

$$\tau_a\cdot g(s) = g(s+a)\tau_a \tag{7.7}$$

である．よって (7.5) が成立する．また

$$\frac{d}{ds}\big(\Gamma(1+s)f(s)\big) = \Gamma(1+s)\frac{df(s)}{ds}+\Gamma'(1+s)f(s)$$

だから (7.6) が得られる．

$e^{(\log x)s}=x^s$ だから

$$\mathcal{L}[f(s)](\log x) = \int_{-\infty}^{\infty}x^s f(s)ds$$

である．よって積分変換 $\mathcal{R}[f(s)](x)$ を

$$\mathcal{R}[f(s)](x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^s\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}ds \tag{7.8}$$

で定義すれば，定理 4，定理 5 および補題 8 によりこの小論のゴールである次の定理が得られる [4].

定理 6 変換 $\mathcal{R}$ により s-空間 $(-\infty < s < \infty)$ の関数に対する平行移動作用素 τ_a は x-空間 $(0 < x < \infty)$ の関数に対する分数冪微分 $\frac{d^a}{dx^a}$ に，また微分 $\frac{d}{ds}$ は微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})$ に移る．

$$\frac{d^a}{dx^a}\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \tag{7.9}$$

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\frac{df(s)}{ds}](x) \tag{7.10}$$

$\mathcal{R}$ は変数変換 $x = e^t$，ラプラス変換，および s-空間の関数に対する $\frac{1}{\Gamma(1+s)}$ によるゲージ変換を組み合わせた変換だが，その適切な定義域や性質を調べるのはこれからの問題である．特に応用のためには逆変換を具体的に書き下すことが望まれる．

注意 (7.9) は分数冪微分と積分の順序交換ができれば直接証明できる．例えば $|\frac{f(s+a)}{\Gamma(1+s)}| < M_a e^{-C_a|s|^\alpha}$ の形の評価があれば直接証明できる．

なお $x_\pm^s$ を使って $-\infty < x < \infty$ で定義される積分変換

$$\mathcal{R}_\pm[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x_\pm^a \frac{f(s)}{\Gamma(1+s)} ds$$

を導入すれば $-\infty < x < \infty$ での関数に対する分数冪微分 $\frac{d^a}{dx^a}_\pm$，微分の対数 $\log(\frac{d}{dx})_\pm$ と s-空間の関数に対する平行移動，微分との関係は

$$\frac{d^a}{dx^a}_\pm \mathcal{R}_\pm[f(s)](x) = \mathcal{R}_\pm[\tau_a f(s)](x), \tag{7.11}$$

$$\log\Big(\frac{d}{dx}\Big)_\pm \mathcal{R}_\pm[f(s)](x) = \mathcal{R}_\pm[\frac{df(s)}{ds}](x) \tag{7.12}$$

となる．

8　おわりに

これまで分数冪微分は命題 3 の枠組みで扱った．その場合

$$\frac{d^a}{dx^a}x^{a-1} = \frac{d^a}{dx^a}\left(\frac{1}{a}\frac{dx^a}{dx}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\frac{d^a x^a}{dx^a} = \frac{\Gamma(a+1)}{a}\delta, \quad 0<a<1$$

だから $\frac{d^a}{dx^a}x^{a-1} = \Gamma(a)\delta \neq 0$ である．しかし

$$\frac{d}{dx}I^{1-a}x^{a-1} = \frac{d}{dx}\Gamma(a) = 0$$

だからリーマン - リウヴィルの意味では $\frac{d^a}{dx^a}x^{a-1} = 0$ となる．このときは $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}$ を一般化されたミッターハ - レフラー (Mittag-Leffler) 関数 ([5] 18 章) として

$$e_{a,t}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{\Gamma(na)}x^{na-1} = x^{a-1}E_{a.a}(tx^a)$$

が分数冪微分方程式

$$\frac{d^a y(x)}{dx^a} = ty(x)$$

を満たす．この意味で $e_{a,t}(x)$ は変形指数関数と思える．リーマン - リウヴィル分数冪微分では $\frac{d^a}{dx^a}\frac{d^b}{dx^b} = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$ は成り立たないから $e_{\frac{1}{2},t}(x)$ が指数関数で表せないことに問題はない．

この例は分数冪微分方程式などを扱うには命題 3 の枠組みは必ずしも適切でないことを示している．実際，分数冪微分を力学や工学の問題に応用しようという研究ではリーマン - リウヴィル分数冪微分やカプト分数冪微分を使うのが普通なので，読者は注意してほしい．

多変数の分数冪微分では $(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})^a$ が x と y についての分数冪微分を使って有限の形に表すことができない，などの問題がある．しかし無限変数の場合，専門的用語の説明は省略するが，分数冪積分と ζ-正則化を使って，場の

理論で物理学者が使っている無限次元ガウス積分の公式

$$\int e^{-\pi(Dx,x)}\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\det D}}$$

(D は正値楕円形作用素で $\det D$ はレイ - シンガー (Ray-Singer) 行列式と呼ばれているもの) を数学的に導くなどの応用がされている [1].

また「はじめに」で触れた分数冪微分や微分の対数による正準交換関係の変形については [2] で論じている. [3] はこの問題に関連して, 二つの 1-径数群 $\{\frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \boldsymbol{R}\}$ と $\{x^a \mid a \in \boldsymbol{R}\}$ で生成された群が $\boldsymbol{R}$ と $\frac{\Gamma(1+s+a)}{\Gamma(1+s+b)}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, から掛け算で生成されたアーベル群の接合積になることを示している($\boldsymbol{R}$ の元 a は関数 $f(s)$ に対し平行移動作用素 τ_a として働く).

分数冪微積については「はじめに」で述べたように日本語の単行本はないようである. 洋書では [6], [11] などがある. 分数冪微分方程式については [7], [12] を挙げておく.

参考文献

[1] A. Asada : Regularized calculus: An application of zeta regularization to infinite dimensional geometry and analysis, *Int. J. Geom. Met. Mod. Phys.* **1** (2004), 107–157.

[2] A. Asada : Fractional calculus and infinite order differential operator, *Yokohama J. Math.* **55** (2010), 129–147.

[3] A. Asada : Fractional calculus and Gamma function, 岩井・谷村・山口 編：数理研講究録 1692「幾何学的力学系理論とその周辺」, 17–38, 京大数理研, 2010.

[4] A. Asada : Hidden hierarchy of calculus inputted in fractional calculus, Proc. fda10, 近刊.

[5] A. Erdéli, W. Magnus, F. Oberbertinger and F.G. Tricomi : *Higher Transcendental Functions*, Krieger, New York, 1981.

[6] R. Hilfer : *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Sci., 2000.

[7] A.A. Kilbas, H.M. Srivastra and J.J. Trujilo : *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 2006.

[8] A.El Kinani and M. Oudadess : *Distribution Theory and Applications*, World Sci., 2010.

[9] J. Mikusinski : *Operational Calculus*, Pergamon, 1959.
(演算子法　上下（上：松村英之訳　下：松浦重武訳）裳華房，1985.）

[10] N. Nakanishi : Logarithm type functions of the differntial operator, *Yokohama J. Math.* **55** (2010), 149–163.

[11] K.B. Oldham and J. Spanier : *The Fractional Calculus*, Academic, 1974.

[12] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations*, Academic, 1998.

[13] 吉田耕作：積分方程式論，岩波，1973.

ツイスターから眺める微分方程式

パス（道），コーン（錐）を開く

待田 芳徳

概 要

ツイスター理論を介在させて，微分方程式と幾何構造の関係をみる．パス幾何とコーン構造をテーマに，パスに付随した常微分方程式とコーンに付随した偏微分方程式をあつかっていく．

パスがいつ測地線になるかという問題をあつかうパス幾何に対して，ツイスター理論の枠組みでとらえていき，平坦なパスの部分族からのクレロー方程式も取り上げていく．また，コーン構造を射影化することによって，射影双対やグラスマン射影双対を通してできるツイスター図式から偏微分方程式自身や解を構成していく．

ハミルトン - ヤコビ方程式とハミルトンの正準運動方程式のつながりからわかるように，コーン構造とパス幾何の密接な関係をみていき，2 階偏微分方程式にも適用範囲を拡げていく．

1　はじめに

次の三位一体を念頭におきたい．

ツイスター理論

↙↗　　　　↘↖

微分方程式　　⇄　　幾何構造

通常，ツイスター理論の部分は「リー群」とおくのが，リー (Lie) やカルタン (Cartan) 以来の思想，理念であろう．対称性を表すリー群は“平坦”なツイスター理論の自己同型群として当然のように顔を出すから，あえて標榜しないことにした．

「微分方程式」は言わずもがな，常微分方程式と偏微分方程式がある．「幾何構造」はペダンティックに言えば，接枠束 (tangent frame bundle) の簡約であるが，リーマン構造，複素構造などのテンソルで定義するもの，接触構造などの分布で定義するものなどいろいろある．「ツイスター理論」についてはこれから説明していこう．

ペンローズ (Roger Penrose) によって始められたツイスター理論の骨子は，4 次元(複素)時空での共形不変な場の方程式を，ツイスター空間と呼ばれる 3 次元複素多様体での幾何的対象物に置き換えて議論することにある．

その後，アティヤ - ヒッチン - シンガー (Atiyah-Hitchin-Singer) は，4 次元リーマン多様体上の半共形平坦性と，ツイスター空間と呼ばれる 6 次元ファイバー束上の複素構造の関係を示して，リーマン多様体での共形不変な幾何的対象物をツイスター空間での正則不変な幾何的対象物に置き換える枠組みを作った．

前者のツイスター理論は，土台を時空とツイスター空間の間のダブル・ファイバー束としてとらえて，ダイナミックに議論をしていく．それにひきかえ，後者のツイスター理論は，リーマン多様体とツイスター空間の間の一つのファイバー束で議論をしていく．

ここであつかうのは，ダイナミックさの面白さにあこがれて，ダブル・ファイバー束を土台とするツイスター理論を展開していくことにある．議論していく手続きそのものは積分幾何を踏襲していて，チャーン (Chern) が等質空間のダブル・ファイバー束として見事な定式化をおこなったものである．ツイ

スター理論は，物理としての発展より，数学として代数幾何や微分幾何の幾何学や表現論，可積分系などで花を開いた．この小論では，ツイスター理論と微分方程式との蜜月関係を述べていこう．コンパス（指針）とすべきキーワードは，コーン(錐)，パス(道）である．

常微分方程式 $y'' = f(x, y, y')$，$y''' = f(x, y, y', y'')$ からパスの概念を抽出して，3節において議論していく．次に，ハミルトン - ヤコビ (Hamilton-Jacobi) 方程式や定常な熱方程式などの偏微分方程式は，連立常微分方程式系と深く関わってくるが，コーンの概念を表に出して，4節において議論していく．そして，パスとコーンの不即不離の関係について述べる．

なぜひねるの意味のツイストなのかというと，ヌル直線の線叢がホップ (Hopf) 束の中のねじられた曲線のような振る舞いをしていることからのイメージである．ツイスターは英字で twist<u>o</u>r と書き，twist<u>e</u>r ではない．ひねくれ者などの悪い意味を避けたらしい．

なお，ツイスター理論を手っ取り早くわかりやすく知る入門書は [W-W] である．以下の議論で出てくる微分方程式と幾何を結びつける基本的な概念や用語を知るには [I-I] が適当であろう．

2　ツイスター理論とは

ツイスター理論という言葉はあちこちで散見するが，われわれの立場で旗幟を鮮明にしておこう (Show the flag !)．ツイスター理論 (twistor theory) の本質とは何か，と問われれば，

ツイスター理論とは，ダブル・ファイバー束を通して，異なる幾何構造の双対性をみる

と喝破したい．通常のいろいろな双対性と違って，幾何構造の土台となる空

間の次元は一般に異なっていることに注意する.

われわれは次のような設定をする.

M をある幾何構造をもつ何らかの空間とし，X_s $(s \in S)$ をその幾何構造に付随した M の部分空間の族とする．また，N を別の幾何構造をもつ空間とし，Y_t $(t \in T)$ をその幾何構造に付随した N の部分空間の族とする．そのとき，M の族の空間 $\{X_s\}$ は空間 N 自身であり，N の族の空間 $\{Y_t\}$ は空間 M 自身である．これが核心部分である.

M と N の**結合空間** (incidence space) Z とは，M と N の直積空間 $M \times N$ の部分空間であって，次を満たすものである.

$$Z = \{(m, X_s) \mid m \in X_s,\ s \in S\} = \{(Y_t, n) \mid n \in Y_t,\ t \in T\}$$

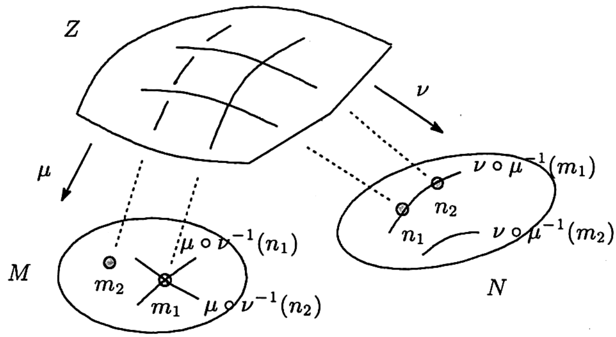
各 X_s は空間 X と同相で，各 Y_t は空間 Y と同相であるとすると，以下のようなツイスター図式と呼ばれるダブル・ファイバー束をもつ.

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Z\ (\subset M \times N) & \longleftarrow & X \\ & \mu \swarrow & & \searrow \nu & \\ (\{Y_t \mid t \in T\} =)\ M \supset X_s & & \leftrightsquigarrow & & Y_t \subset N (= \{X_s \mid s \in S\}) \end{array}$$

μ, ν は自然な射影である．Z は，ファイバー Y をもつ M 上のファイバー束であり，またファイバー X をもつ N 上のファイバー束[1] である.

このとき，M と N は**ツイスター対応**の関係にあるという．$m \in M$ に対してある $Y_t = \nu \circ \mu^{-1}(m)$ が対応し，$n \in N$ に対してある $X_s = \mu \circ \nu^{-1}(n)$ が対応する．空間の点は，無味乾燥なものではなく豊かな構造をもっているのである．お互いの空間が，何らかの意味のモジュライ空間なのである.

[1] ファイバー束とは，底空間（M か N）の開被覆からの各開集合とファイバーの直積空間を，ファイバーの適当な変換ではり合わせたものである.



以上が舞台設定で，これからどう演技するかというと，M（あるいは N）上の幾何的対象物を Z へプルバック (pull back) やリフトして，Z 上である種の（座標)変換をして，N（あるいは M）上へプッシュダウン (push down) や射影していくのである．標語的に言えば，

持ち上げて，ねじって，下へ落とす

これがツイスター精神！である．

たとえ話　M を，数学者全体とするとはっきりしないので，日本数学会の会員全体としておく．N を，趣味全体の空間とする．ゲーム系，スポーツ系，芸術系などいろいろきりがないであろう．無趣味な人は数学が趣味としておく．M の部分空間の族の一つは，数学会員の中で，ある一つの趣味をもっている人の全体である．N の部分空間の族の一つは，一人の数学会員の趣味のすべてである．結合空間 Z は，一人の数学会員と一つの趣味の組であって，その人がその趣味をもつ集合である．M, N, そして Z の間のダブル・ファイバー束もどきができあがる．当然ながら，それぞれのファイバーの数はばらばらである．

3　パスに付随した常微分方程式

3.1　パス幾何

M を多様体（曲面などを思い浮かべよ）とし，$P(TM)$ を射影化された接束（直線方向全体のファイバー束のこと）とする．M 上の**パス幾何**とは，M での次のような曲線（パス (path)，あるいは道という）の集合 $\mathcal{C}$ のことである：任意の点 $m \in M$ と任意の方向 $l \in P(T_mM)$ に対して，それに接するパスがただ 1 本ある，すなわち，$m \in \gamma$，そして m での γ の 1 次元接空間が $T_m\gamma = l$ となるような一意なパス $\gamma \in \mathcal{C}$ が存在する．

M 上にパス幾何 $\mathcal{C}$ が与えられると，M と $\mathcal{C}$ の間のツイスター図式が次のようにできる．結合空間を

$$Z = \{(m,\gamma) \in M \times \mathcal{C} \mid m \in \gamma\}$$

と定義するが，$(m,\gamma) \in Z$ に対して，$(m,\gamma) \longmapsto T_m\gamma$ と対応させることによって，$Z\,(\subset M \times \mathcal{C})$ と $P(TM)$ を同一視することができることに注意する．

そのとき，次のダブル・ファイバー束をもつ．

$$\begin{array}{ccc} & Z = P(TM) & \\ \pi \swarrow & & \searrow \rho \\ M & & \mathcal{C} \end{array}$$

これから，いろいろなパス幾何を定義していこう．パス幾何を定義して，その後何を考えるのか．

(i)　適当な同値関係のもとで，不変量を見つけたり，さらに分類すること．

(ii)　どんな条件で，パスが測地線となるような射影構造が M に入るか．

(iii)　パス全体の空間 $\mathcal{C}$ は，どんな幾何構造をもつか．

この小論ではこれらをあつかう余裕はないが，興味があれば [I-L] を見よ．

3.1.1 通常のパス幾何

微分方程式 $y''=f(x,y,y')$ とパス幾何の関係を明確に述べてみよう．$y''=f(x,y,y')$ (f ：なめらかな関数) において，ある定数 x_0,y_0,y'_0 をとると，$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y'_0$ を満たす解 $y=y(x)$ が一意に存在することはよく知られている．よって，(x,y) 空間でパス幾何が定義されたことになる．では逆に，パス幾何から議論を出発させるとどうなるであろうか．

1 独立変数 x, 1 従属変数 y の k 階微分 $p_k=\frac{d^ky}{dx^k}$ までのテイラー (Taylor) 展開の係数の空間である k-ジェット空間を $J^k(1,1)$ と表す．n 独立変数のときは $J^k(n,1)$ と表す．微分を考えない (x,y) 空間は 0-ジェット空間 $J^0(1,1)$ である．また，1-ジェット空間 $J^1(n,1)$ は $M=J^0(n,1)$ の射影余接束 $P(T^*M)$ の開稠密な部分集合とみなせる．

座標系 (x,y) をもつ 0-ジェット空間 $M=J^0(1,1)=\boldsymbol{R}^2$ と座標系 $(x,y,p=y')$ をもつ 1-ジェット空間 $Z=J^1(1,1)=\boldsymbol{R}^3$ を考える．Z から M への自然な射影を π と表す．Z は，$dy=pdx$ より $P(T^*M)$ の部分集合とみなせる．これは y 軸 $\frac{\partial}{\partial y}$ 方向をはずした直線方向束 $P(T^0M)$ と同一視できる．なぜなら，$P(T^0M)$ のファイバーでの非同次座標 $(1,p)=\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}$ から，Z での (x,y,p) を対応させればよい．

Z 上に標準的な接触形式 $\omega=dy-pdx$ をもつ．$l=\langle\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}\rangle\in Z$ において，2 次元部分空間

$$\mathcal{D}_l=\left\langle\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle\subset T_lZ$$

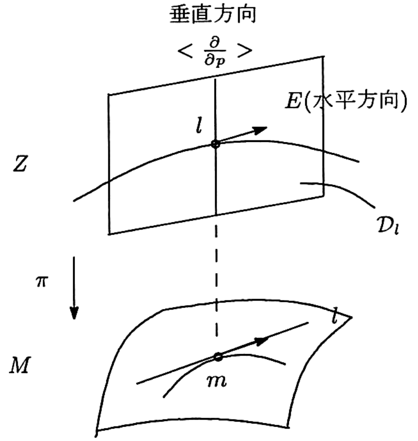
を対応させる．これは階数 2 の分布で，接触形式 ω を零化する接触分布 $\mathcal{D}=\{\omega=0\}$ である．$l\in Z$ において，$\mathcal{D}_l=\pi_*^{-1}(l)\subset T_lZ$ である．

いま，Z でのファイバーの (p 方向である) 垂直方向 $\langle\frac{\partial}{\partial p}\rangle$ の $\mathcal{D}$ における補

空間を与えるベクトル場

$$E = \xi\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial p} \subset \mathcal{D} \quad (\xi \neq 0)$$

をとる．水平方向を定めるといい，E は Z 上に**擬接続** (pseudo-connection) を与えるという．構造群での不変性を仮定しての接続の概念よりはゆるい定義である．そのとき，ベクトル場 E の Z での積分曲線 $(x(t), y(t), p(t))$ ができる．その π による射影は，M 上のパス幾何 $\mathcal{C}$ を定義する．このパス幾何を**通常のパス幾何**といおう．通常という意味は，各点ですべての方向に対してパスを考えることである．次の 3.1.2 のように，ある特別な方向に対してのみパスを考える場合と区別するためである．



垂直方向に横断的だから，$\xi = 1$, $\eta = f(x, y, p)$ とおくことができる．そのとき，$\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, p)\frac{\partial}{\partial p}$ より，Z 上のベクトル場 E は，独立変数 x の連立 1 階常微分方程式系

$$x' = 1, \quad y' = p, \quad p' = f(x, y, p)$$

を定義する．それゆえ，$J^0(1,1) = \boldsymbol{R}^2$ 上に単独 2 階常微分方程式

$$y'' = f(x, y, y')$$

が定義される．もちろん $f=0$ をとるならば，解曲線は直線 $y=ax+b$ （a,b は定数）である．そのときのパスを平坦パスという．

［まとめ］ Z 上に擬接続を与える(接触分布 $\mathcal{D}$ の分解をもつ) $\Longleftrightarrow$ M 上に通常のパス幾何 $\mathcal{C}$ を定める $\Longleftrightarrow$ M において 2 階常微分方程式 $y''=f(x,y,y')$ を考える．

3.1.2　ルジャンドル・パス幾何

ついで，微分方程式 $y'''=f(x,y,y',y'')$ とパス幾何の関係を述べてみよう．

座標系 $(x,y,p=y')$ をもつ 1-ジェット空間 $M=J^1(1,1)=\boldsymbol{R}^3$ と座標系 $(x,y,p=y',q=y'')$ をもつ 2-ジェット空間 $Z=J^2(1,1)=\boldsymbol{R}^4$ を考える．Z から M への自然な射影を π と表す．M 上に標準的な接触形式 $\omega=dy-pdx$ と接触分布 D をもっていた．D に接する直線方向をルジャンドル (Legendre) 直線方向という．Z は，D での $\frac{\partial}{\partial p}$ 軸方向をはずした直線方向全体からなるルジャンドル直線方向束 $P(D^0)\subset P(TM)$ と同一視できる．なぜなら，$P(D^0)$ のファイバーでの非同次座標 $(1,q)=(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y})+q\frac{\partial}{\partial p}$ から，Z での (x,y,p,q) を対応させればよい．

Z 上に標準的な 2 次接触形式（エンゲル (Engel) 形式という）$\omega_1=dy-pdx$，$\omega_2=dp-qdx$ をもつ．$l=\langle(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y})+q\frac{\partial}{\partial p}\rangle\in Z$ において，2 次元部分空間

$$\mathcal{D}_l=\left\langle\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial p},\ \frac{\partial}{\partial q}\right\rangle\subset T_lZ$$

を対応させる．これは 2 次接触形式 ω_1,ω_2 を零化する接触分布 $\mathcal{D}=\{\omega_1=\omega_2=0\}$ である．$l\in Z$ において，$\mathcal{D}_l=\pi_*^{-1}(l)\subset T_lZ$ である．

$M=J^1(1,1)$ でのルジャンドル直線とは，一般的にはパラメータ x の

$$(x,\ ax^2+bx+c,\ 2ax+b)$$

として表され，D に接する．$J^0(1,1)$ への射影は放物線 $y=ax^2+bx+c$ である．逆に言えば，放物線の微分であるルジャンドル・リフトがルジャンドル直線である．（今後，リフトといえば微分による持ち上げを意味する.）(a,b,c) はルジャンドル直線全体の空間 $LG_{2,4}$ の座標系とみなされ，$LG_{2,4}$ は（制限のない）通常の直線全体の空間である 4 次元グラスマン (Grassmann) 多様体 $G_{2,4}$ の超曲面になっている．

いま，Z でのファイバーの（q 方向である）垂直方向 $\langle\frac{\partial}{\partial q}\rangle$ の $\mathcal{D}$ における補空間を与えるベクトル場

$$E=\xi\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial p}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial q}\subset\mathcal{D}\quad(\xi\neq 0)$$

をとる．水平方向を定めるといい，E は Z 上に D 方向の**部分接続** (partial connection) を与えるという．そのとき，ベクトル場 E の Z での積分曲線 $(x(t),y(t),p(t),q(t))$ ができる．その π による射影は，M 上の D 方向に制限されたパス幾何 $\mathcal{C}$ を定義する．このパス幾何を**ルジャンドル・パス幾何**といおう．垂直方向に横断的だから，$\xi=1,\eta=f(x,y,p,q)$ とおくことができる．そのとき，Z 上のベクトル場 E は，独立変数 x の連立 1 階常微分方程式系

$$x'=1,\quad y'=p,\quad p'=q,\quad q'=f(x,y,p,q)$$

を定義する．それゆえ，$J^0(1,1)=\boldsymbol{R}^2$ 上に単独 3 階常微分方程式

$$y'''=f(x,y,y',y'')$$

が定義される．もちろん $f=0$ をとるならば，解曲線は $J^0(1,1)$ での放物線 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c は定数）であり，$M=J^1(1,1)$ へのルジャンドル・リフト $(x,y,p)=(x,\ ax^2+bx+c,\ 2ax+b)$ がルジャンドル直線である．そのときのルジャンドル・パスを平坦ルジャンドル・パスという．

[まとめ] $Z=J^2$ 上に部分接続を与える(2 次接触分布 $\mathcal{D}$ の分解をもつ）$\Longleftrightarrow$

$M = J^1$ 上にルジャンドル・パス幾何 C を定める $\iff$ J^0 において 3 階常微分方程式 $y''' = f(x, y, y', y'')$ を考える.

3.2　クレロー方程式

クレロー (Clairaut) 方程式は，微分方程式を初めて習うとき，解の種類として一般解，特殊解に続いて特異解が出てきたときの例としてお目にかかるものである．しかしその後，解析学や物理学などで出会うことは稀である．クレロー方程式の本質はツイスター理論の考え方そのものであることを述べる.

簡単に 1 階クレロー方程式の場合を復習しておこう．**クレロー方程式**とは,

$$y = xp + f(p)$$

の形の微分方程式をいう．ここで，x は独立変数，y は未知関数，$p = y' = \frac{dy}{dx}$，f は任意のなめらかな関数である.

微分すると，$p'(x+f'(p)) = 0$ となり，(i) $p' = 0$，または (ii) $x+f'(p) = 0$ となる.

(i) $p' = 0$ のとき，$p = c$（定数）となり，一般解

$$y = cx + f(c)$$

を得る．これは直線群を表している.

(ii) $x+f'(p) = 0$ のとき，$x = -f'(p)$, $y = xp+f(p)$ から p を消去して，特異解 $y = \varphi(x)$ が得られる．これは，$y = cx+f(c)$ と，これを c で偏微分した $0 = x+f'(c)$ から,

$$x = -f'(c), \qquad y = -cf'(c) + f(c)$$

に他ならない．これは直線群の包絡線を表している.

例えば，(1) $f(p)=p^2$ をとれば $y=\varphi(x)=-\frac{1}{4}x^2$, (2) $f(p)=p^3$ をとれば $27y^2+4x^3=0$, (3) $f(p)=\sqrt{1+p^2}$ をとれば $x^2+y^2=1$ (上半分) が，それぞれ包絡線となる．

3.2.1　1階クレロー方程式

0-ジェット空間 $M=J^0(1,1)=\boldsymbol{R}^2:(x,y)$ において，平坦パスである直線全体の集合 $\mathcal{C}$，すなわち，座標系 (a,b) をもつ $N=\{y=ax-b \mid a,b:$ 定数$\}$ を考える．$y''=0$ に対応するパス幾何である．M と N の結合空間は $Z=\{(x,y;a,b)\in M\times N \mid y=ax-b\}$ であり，接触形式 $\omega=dy-pdx$ をもつ 1-ジェット空間 $J^1(1,1)=\boldsymbol{R}^3:(x,y,p=y')$ とみなされる．なぜなら，$y=ax-b$ より $b=ax-y$ となるから，Z の点は座標系 $(x,y,a=y'=p)$ によって表されるからである．

M における直線 $y=ax-b$ のルジャンドル・リフト $x=t$, $y=at-b$, $p=a$ を，a,b,t で解いた $a=p$, $b=xp-y$, $t=x$ は，N における双対直線 $b=xa-y$ のルジャンドル・リフトである．そのとき，次のツイスター図式と Z でのルジャンドル双対性（ルジャンドル変換）をもつ．

$$\begin{array}{ccccc} p & \longrightarrow & Z:(x,y,p) \leftrightsquigarrow (a,b,t) & \longleftarrow & t \\ & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\ & M:(x,y) & & N:(a,b) & \end{array}$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=at-b \\ p=a \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{cases} a=p \\ b=xp-y \\ t=x \end{cases}$$

いま，任意の関数 $b=f(a)$ をとり，N での（直線ではない）曲線 $C_0:(a,f(a))$ を考える．平坦パス全体の集合 N から，1次元の部分集合をピックアップしてきたのである．その Z への逆像 $\pi_2^{-1}(C_0)$ である Z における曲面 $S_0':(a,f(a),t)$

から，ルジャンドル双対性をとると $(t, at-f(a), a)$ となり，M への射影 $\pi_1(S_0')$ から $(t,\ at-f(a))$ となる．すなわち，M における 1-パラメータ直線群

$$y = ax - f(a)$$

（a は定数）ができ，a を消去するために微分して，クレロー方程式

$$y = xy' - f(y')$$

ができる．

上記の曲線 $(a, f(a))$ の Z へのルジャンドル・リフト $(a, f(a), f'(a))$ から，ルジャンドル双対性をとると $(f'(a),\ af'(a)-f(a),\ a)$ となり，M への射影から $(f'(a),\ af'(a)-f(a))$ となる．M における曲線 $\tilde{C}_0$:

$$x = f'(a), \qquad y = af'(a) - f(a)$$

は，N における曲線 $(a, f(a))$ の双対曲線といい，1-パラメータ直線群 $y = ax-f(a)$ の包絡線である．

［まとめ］ 1 階クレロー方程式は，$y''=0$ の解である M における 2-パラメータ直線群における部分 1-パラメータ直線群を，(i) N における曲線から Z への逆像(持ち上げる)，(ii) ルジャンドル双対性(ねじる)，(iii) M への射影（下へ落とす）を通して構成したものである．そして，N におけるその曲線の双対曲線は，その 1-パラメータ直線群の包絡線であり，クレロー方程式の特異解である．

3.2.2　2 階クレロー方程式

0-ジェット空間 $J^0(1,1) = \boldsymbol{R}^2 : (x, y)$ において，平坦ルジャンドル・パスである放物線全体の集合 $\mathcal{C}$，すなわち，座標系 (a, b, c) をもつ $N = \{y = ax^2+bx+c \mid a, b, c :$ 定数$\}$ を考える．$y'''=0$ に対応するルジャンドル・パス幾何である．

接触形式 $\omega = dy - pdx$ をもつ 1-ジェット空間 $M = J^1(1,1) : (x, y, p = y')$ を考えると，M と N の結合空間は $Z = \{(x,y,p;a,b,c) \in M \times N \mid y = ax^2+bx+c,\ p = 2ax+b\}$ であり，エンゲル形式 $\omega_1 = dy - pdx$, $\omega_2 = dp - qdx$ をもつ 2-ジェット空間 $J^2(1,1) : (x, y, p = y', q = y'')$ とみなされる．なぜなら，$b = -2ax+p$, $c = -ax^2-bx+y = ax^2-px+y$ となるから，Z の点は座標系 $(x, y, p,\ a = \frac{1}{2}y'' = \frac{1}{2}q)$ によって表されるからである．

M におけるルジャンドル直線 $y = ax^2+bx+c$, $p = 2ax+b$ のエンゲル・リフト $x = t$, $y = at^2+bt+c$, $p = 2at+b$, $q = 2a$ を，a, b, c, t で解いた $a = \frac{1}{2}q$, $b = -xq+p$, $c = \frac{1}{2}x^2q - xp + y$, $t = x$ は，下記で述べる N におけるヌル直線のリフトである．そのとき，次のツイスター図式と Z でのエンゲル・ルジャンドル双対性（エンゲル・ルジャンドル変換）をもつ．

$$\begin{array}{ccccc} q & \longrightarrow & Z : (x,y,p,q) \leftrightsquigarrow (a,b,c,t) & \longleftarrow & t \\ & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\ M : (x,y,p) & & & & N : (a,b,c) \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \\ p = 2at + b \\ q = 2a \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}q \\ b = -xq + p \\ c = \dfrac{1}{2}x^2 q - xp + y \\ t = x \end{cases}$$

N 上に自然な $(2,1)$ 型共形構造 $[g]$, $g = 4dadc - db^2$, をもつことがわかる．そのもとで，N における q をパラメータとする曲線

$$a = \frac{1}{2}q, \quad b = -xq + p, \quad c = \frac{1}{2}x^2 q - xp + y$$

$(x, y, p$ は定数）は，（長さ 0 の方向をもつ）ヌル直線である．ヌル直線全体の集合である M 上には接触構造，そしてルジャンドル直線全体の集合 N 上には共形構造が付加されていることになる．ヌル直線は 2 次コーンであるヌ

ル・コーン $4ac-b^2=0$, および平行移動したものに接している．N 上のヌル・コーン（の母線）方向に制限されたパス幾何 $\mathcal{C}$ を定義する．このパス幾何を**ヌル・パス幾何**といおう．ヌル直線を平坦ヌル・パスという．共通の性質は，x,y,p を消去して，次の a を独立変数とした拘束された微分方程式である．

$$b''=0, \quad b'^2=4c'$$

いま，任意の関数 $c=f(a)$ $(f'(a)\geq 0)$ をとり，N での（ヌル直線ではない）ヌル曲線 $C_0:(a,2\int\sqrt{f'(a)}da+\alpha, f(a))$ (α は定数) を考える．(ヌル曲線とは，各接ベクトルがヌルである曲線のこと.) その Z への曲線の逆像 $\pi_2^{-1}(C_0)$ である Z における曲面 $S_0':(a,2\int\sqrt{f'(a)}da+\alpha, f(a), t)$ から，エンゲル-ルジャンドル双対性をとると $\big(t,\ at^2+(2\int\sqrt{f'(a)}da+\alpha)t+f(a),\ 2at+2\int\sqrt{f'(a)}da+\alpha,\ 2a\big)$ となり，M への射影 $\pi_1(S_0')$ から $(t,\ at^2+\beta t+f(a),\ 2at+\beta)$ ($\beta=2\int_{a_0}^{a}\sqrt{f'(a)}da+\alpha$ とした) となる．M における 2-パラメータのルジャンドル直線群

$$y=ax^2+\beta x+f(a)$$

(a,β は定数) ができ，a,β を消去するために微分して，2 階クレロー方程式

$$y=-\frac{x^2}{2}y''+xy'+f\Big(\frac{1}{2}y''\Big)$$

ができる．この方程式を**ルジャンドル - クレロー方程式**といおう．

上記の曲線 $(a,\beta,f(a))$ の Z へのリフト $(a,\beta,f(a),-\sqrt{f'(a)})$ から，エンゲル - ルジャンドル双対性をとり，M への射影から M における a をパラメータとするルジャンドル曲線 $\tilde{C}_0$ を得る(ルジャンドル曲線とは，各接ベクトルが接触分布に接する曲線のこと.)：$\beta=2\int_{a_0}^{a}\sqrt{f'(a)}da+\alpha$ として，

$$x=-\sqrt{f'(a)}, \quad y=af'(a)-\beta\sqrt{f'(a)}+f(a), \quad p=-2a\sqrt{f'(a)}+\beta.$$

それを N におけるヌル曲線 $(a,\beta,f(a))$ の双対曲線といい，1-パラメータ a のルジャンドル直線群 $y=ax^2+\beta x+f(a)$ (β は定数) の包絡線である．

[まとめ]　ルジャンドル - クレロー方程式は，$y'''=0$ の解である M における 3-パラメータのルジャンドル直線群における部分 2-パラメータのルジャンドル直線群を，(i) N におけるヌル曲線から Z への逆像(持ち上げる)，(ii) エンゲル - ルジャンドル双対性(ねじる)，(iii) M への射影（下へ落とす）を通して構成したものである．そして，N におけるそのヌル曲線の双対曲線は，ルジャンドル曲線であって，さらに部分 1-パラメータのルジャンドル直線群の包絡線であり，ルジャンドル - クレロー方程式の特異解である．

次に，双対性の立場から，逆を考えよう．任意の関数 $y=f(x)$ をとり，$p=f'(x)$, $dy=pdx=f'(x)dx$, $y=f(x)+\alpha$ (α は定数) から，M での（ルジャンドル直線ではない)ルジャンドル曲線 $C:(x,f(x)+\alpha,f'(x))$ を考える．その Z への曲線の逆像 $\pi_1^{-1}(C)$ である Z における曲面 $S':(x,f(x)+\alpha,f'(x),q)$ から，エンゲル - ルジャンドル双対性をとると $(\frac{1}{2}q,-xq+f'(x),\frac{1}{2}x^2q-xf'(x)+f(x)+\alpha,x)$ となり，N への射影 $\pi_2(S')$ から $(\frac{1}{2}q,-xq+f'(x),\frac{1}{2}x^2q+\beta)$ ($\beta=-xf'(x)+f(x)+\alpha$ とした) となる．N における 2-パラメータのヌル直線群

$$b=-2xa+f'(x),\quad c=x^2a+\beta$$

(x,β は定数) ができ，x,β を消去するために微分して，a を独立変数とした拘束された 1 階クレロー方程式

$$b=ab'+f\Big(-\frac{1}{2}b'\Big),\quad b'^2=4c'$$

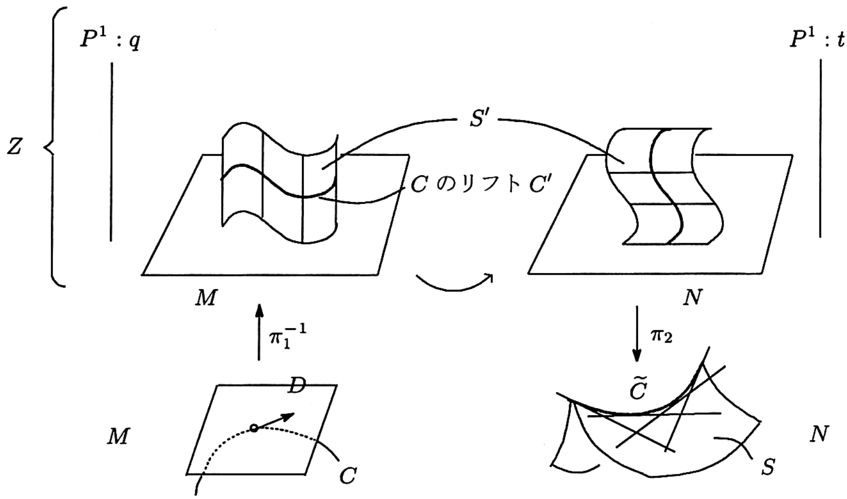
ができる．この方程式を**ヌル・クレロー方程式**といおう．

上記の曲線 $(x,f(x)+\alpha,f'(x))$ の Z へのエンゲル・リフト $(x,f(x)+\alpha,f'(x),f''(x))$ から，エンゲル - ルジャンドル双対性をとり，N への射影から N における x をパラメータとするヌル曲線 $\tilde{C}$：

$$a=\frac{1}{2}f''(x),\quad b=-xf''(x)+f'(x),\quad c=\frac{1}{2}x^2f''(x)-xf'(x)+f(x)+\alpha$$

を得る．それを M におけるルジャンドル曲線 $(x, f(x)+\alpha, f'(x))$ の双対曲線といい，1-パラメータ x のヌル直線群 $b=-2xa+f'(x)$，$c=x^2a+\beta$ (β は定数) の包絡線である．

ところで，$\pi_2(S')$ からできる曲面 S は，コーン場に付随した偏微分方程式の解を表すことを次節の 4.1.3 の例で示す．



[まとめ] ヌル・クレロー方程式は，拘束された2階微分方程式 $b''=0, b'^2=4c'$ の解である N における 3-パラメータのヌル直線群における部分 2-パラメータのヌル直線群を，(i) M におけるルジャンドル曲線から Z への逆像(持ち上げる)，(ii) エンゲル - ルジャンドル双対性(ねじる)，(iii) N への射影（下へ落とす）を通して構成したものである．そして，M におけるそのルジャンドル曲線の双対曲線は，ヌル曲線であって，さらに部分 1-パラメータのヌル直線群の包絡線であり，ヌル・クレロー方程式の特異解である．

イメージ　Z 上で，「左へは，接触～」「右へは，共形～」と口上をはやしながら，(双方向をもつ) 南京玉すだれの形を変えていく様子がぴったりする．その形が M や N で実現されているのである．

4 コーンに付随した偏微分方程式

代数方程式を考えた場合：(1) 単独方程式において，重複解をもつ条件は判別式 (discriminant) として表される．それを幾何的にくわしく射影双対をもとに考えていくことにする．それからコーン（cone, 錐ともいう）に付随した 1 階偏微分方程式を構成する．(2) 連立方程式において，共通解をもつ条件は終結式 (resultant) として表される．それを幾何的にくわしくグラスマン射影双対をもとに考えていくことにする．それからラグランジュ・コーン (Lagrange cone) に付随した 2 階偏微分方程式を構成する．

さらに，前節で述べたパス幾何との関連をみながら，偏微分方程式と連立常微分方程式系の間の関係を幾何的に調べて拡張していく．

なお，以下の射影双対 (4.1.1) とグラスマン射影双対 (4.2.1) のさらなる議論は [G-K-Z] を見よ．

4.1 1 階偏微分方程式

4.1.1 射影双対

V^n を複素 n 次元ベクトル空間とし，$(V^n)^*$ を 1 次形式全体からなる双対空間，$P = P^{n-1} = P(V)$ を V の 1 次元部分空間全体からなる射影空間，$P^* = (P^{n-1})^* = P(V^*)$ を $P(V)$ の超平面全体からなる双対射影空間とする．

$v \in V$ に対して，射影化を $[v] \in P(V)$, $[v] = [av]$ ($a \neq 0$ はスカラー)，と表し，$x \in P(V)$ に対して，コーン化を $\hat{x} = \{v \mid x = [v], v \in V - \{0\}\} \subset V$ と表す．

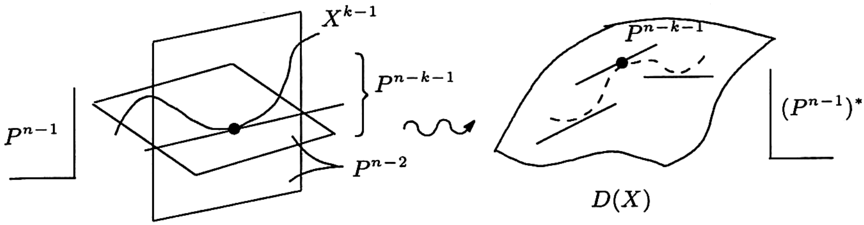
X^{k-1} を P^{n-1} の $k-1$ 次元部分多様体とする．以下，代数多様体としておく．超平面 $H \subset P$ が X に接するとは，なめらかな点 $x \in X$ が存在して，H が x での X の接空間を含むときをいう．

$X^\vee \subset P^*$ を，X に接する P の超平面全体の集合の閉包とする．$X^\vee$ は X に**射影双対**であるという．

反射性といわれる $(X^\vee)^\vee = X$ が成り立つ．x が X のなめらかな点とし，H が $X^\vee$ のなめらかな点とする．そのとき，H が x で X に接するということと，(P^* での超平面とみなした) x が H で $X^\vee$ に接することは同値である．

コーン化して $\hat{X}^k \subset V^n$ と，$(\hat{X})^\vee = \widehat{(X^\vee)} \subset (V^n)^*$ ができる．

X の射影双対な $X^\vee$ は "一般的には" P^* の超曲面である．1 点 $x \in X$ で接する超平面全体は P^* で $(n-1)-(k-1)-1 = n-k-1$ 次元平面 P^{n-k-1} であることに注意すると，次元勘定は $n-k-1+(k-1) = (n-1)-1$ となるからである．もし $X^\vee$ が超曲面でないならば，codim $X^\vee = r+1$ として，X は P^r によってルーリングされていることがわかる．もし $X^\vee$ が超曲面であるならば，射影双対な $X^\vee$ を X の**判別多様体** (discriminant variety) といい，$D(X)$ と表す．定義方程式を X の判別式といい，D_X と表す．D_X は，$D(X)$ が $D_X = 0$ によって表される V 上の既約同次多項式関数である．



図において：$P^{n-1} \supset X^{k-1}$ での黒い点は P^{n-k-1} に対応し，$(P^{n-1})^*$ での黒い点を通る直線である．$(P^{n-1})^*$ での黒い点は，もし X^{k-1} にいちばん接する接触 (osculating) 平面 P^{n-2} が存在するならば，その P^{n-2} に対応する．そのとき，$D(X)$ での点線の曲線は X^{k-1} の双対な $\check{X}^{k-1}$ ($D(X)$ での特異点) に対応する．

$\hat{X} \subset V$ を X のコーン化とし，$(x_1, \cdots, x_k)$ を $\hat{X}$ 上の局所座標系とする．$f \in V^*$ を V 上の 1 次形式として，$\hat{X}$ に制限したものは $f(x_1, \cdots, x_k)$ である．X の判別式 D_X が $f \in V^*$ で 0，つまり，$f \in D(X)$ であることは，方程式 $f(x_1, \cdots, x_k) = 0$ が重複解をもつ，すなわち，ある $v = (x_1, \cdots, x_k) \in \hat{X}$ $(v \neq 0)$ において，$f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, \cdots, k)$ となることである．

われわれは，X と $D(X)$ の間の次のダブル・ファイバー束をもつ．

$$\begin{array}{ccccc} & & I_X\ (\subset P^{n-1} \times (P^{n-1})^*) & & \\ & \pi \swarrow & & \searrow \rho & \\ (P^{n-1} \supset)\ X & & \leftrightsquigarrow & & D(X) \subset (P^{n-1})^* \end{array}$$

結合空間 I_X は $\{(x, H) \mid x \in X,\ x \in H\}$ である．コーン化した $\hat{X}$ と $\widehat{D(X)}$ の間に対しても，当然ダブル・ファイバー束ができる．

〔例 1〕 同次座標 x_1, x_2, x_3 をもつ P^2 において，

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$$

で表される 2 次曲線 X を考える．ここで，$A = (a_{ij})$ は非退化対称な 3×3 行列である．そのとき，$X^\vee = D(X) \subset (P^2)^*$ は逆行列 A^{-1} によって表される 2 次曲線である．一般次元の $(Ax, x) = 0$ によって表される 2 次超曲面 $X \subset P(V)$ に対しても同様に，2 次超曲面 $X^\vee = D(X) \subset (P(V))^*$ をもつ．

〔例 2〕 非同次座標 x, y, z をもつ P^3 において，3 次曲線（後述のベロネーゼ曲線）X :

$$P^1 \supset \boldsymbol{C} \longrightarrow X \subset P^3, \qquad u \longmapsto (x, y, z) = (u, u^2, u^3)$$

を考える．そのとき，$X^\vee = D(X) \subset (P^3)^*$ は，3 次方程式 $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ の判別式

$$D = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd = 0$$

で表される 4 次超曲面である.

〔例 3〕 同次座標をもつ P^5 において，同次座標 u, v, w をもつ P^2 の（後述の 2 次ベロネーゼ）埋め込み：

$$P^2 \longrightarrow X \subset P^5, \qquad [u, v, w] \longmapsto [u^2, uv, uw, v^2, vw, w^2]$$

を考える．そのとき，

$$f = au^2 + buv + cuw + dv^2 + gvw + hw^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

から，$X^\vee = D(X) \subset (P^5)^*$ は,

$$D_X = \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ b & 2d & g \\ c & g & 2h \end{vmatrix} = 0$$

で表される 3 次超曲面である.

いま，V_1 を $\dim V_1 = m$ で座標系 $x = (x_1, \cdots, x_m)$ をもち，V_2 を $\dim V_2 = n$ で座標系 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ をもつとする．$V_1 \times V_2$ から，$X = P^{m-1} \times P^{n-1} = P(V_1) \times P(V_2)$ を考える．そして，$V = V_1 \otimes V_2$, $V^* = V_1^* \otimes V_2^*$ として，$P^{mn-1} = P(V) = P(V_1 \otimes V_2)$, $(P^{mn-1})^* = P(V^*) = P(V_1^* \otimes V_2^*)$ を考える.

X から $P(V)$ への**セグレ埋め込み** (Segre embedding) を次式で定義する.

$$\varphi : X = P(V_1) \times P(V_2) \longrightarrow P(V) = P(V_1 \otimes V_2), \quad ([v_1], [v_2]) \mapsto [v_1 \otimes v_2]$$

分解可能ベクトルとして埋め込まれる．埋め込まれた X を同じ記号 X と表し，**セグレ多様体** (Segre variety) といい，V へのコーン化 $\hat{X}$ を**セグレ・コーン** (Segre cone) という.

$V = V_1 \otimes V_2 \cong \mathrm{Hom}(V_2^*, V_1)$ (V_2^* から V_1 への準同型写像全体) を $m \times n$ 行列全体の空間と同一視できる．座標系を $B = (b_{ij})$ と表す．セグレ埋め込み

を座標で表示すれば,

$$(x_1,\cdots,x_m)\times(y_1,\cdots,y_n)\longmapsto$$
$$(x_1y_1,\cdots,x_1y_n,x_2y_1,\cdots,x_my_n)=(b_{ij})=(x_iy_j)$$

となり, セグレ・コーンは $m\times n$ 行列全体 V において階数1の行列全体であるコーンである. 階数1の行列は, 任意の2次小行列式 $=0$ をもつので,

$$b_{i_1j_1}b_{i_2j_2}-b_{i_1j_2}b_{i_2j_1}=0\quad(1\le i_1<i_2\le m,\ 1\le j_1<j_2\le n)$$

を満たす.

セグレ多様体 X の射影双対 $X^\vee$ は, $m=n$ のときに限り, $P(V^*)$ において超曲面である. 正方行列全体の空間 V^* において, 判別式 D_X は行列式に他ならない. 1次形式 $f=A=(a_{ij})\in V^*$ をセグレ多様体 X 上に制限すれば, 双1次形式 $f(x,y)=\sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_iy_j$ をもつことからわかる.

ノート　いまの議論は二つの直積空間に限る必要はなく, r 個の直積 $V=V_1\times\cdots\times V_r$ から出発してもよく, そのときは r 次元超行列式 (hyperdeterminant) が絡んでくる. 通常の行列式は正方形である2次元行列から定義され, 3次元の超行列式は立体である行列から定義される立体行列式である.

4.1.2　双対な微分方程式系

4.1.1 の後半に引き続いて, V_1,V_2 を $\dim V_1=\dim V_2=n$ で座標系 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ をもつとする. $V_1\times V_2$ から, $X=P_1^{n-1}\times P_2^{n-1}=P(V_1)\times P(V_2)$ を考える. そして, $V=V_1\otimes V_2$, $V^*=V_1^*\otimes V_2^*$ として, $P^{n^2-1}=P(V)=P(V_1\otimes V_2)$, $(P^{n^2-1})^*=P(V^*)=P(V_1^*\otimes V_2^*)$ を考える. そのとき, X と $D(X)$ の間のダブル・ファイバー束ができる.

$$\begin{array}{ccc} & I_X\ (\subset P(V)\times P(V^*)) & \\ \swarrow & & \searrow \\ P(V_1\otimes V_2)\supset X & \leftrightsquigarrow & D(X)\subset P(V_1^*\otimes V_2^*)\end{array}$$

• コーン化した $\hat{X}$ と $\widehat{D(X)}$ の間の射影双対に関するツイスター対応ができる．

$$(1)\quad V_1 \otimes V_2 \supset \hat{X} \quad \leftrightsquigarrow \quad \widehat{D(X)} \subset V_1^* \otimes V_2^*$$

ここで，$\hat{X}$ の行列はセグレ埋め込みにより階数 1 をもち，$\widehat{D(X)}$ の行列は階数 $n-1$ 以下をもつ．行列の言葉でいうと，余因子の関係である．

• 対応 (1) を行列式でいえば，左側は任意の 2 次小行列式 = 0 であり，右側は行列式 = 0 である．行列座標系を，V に対して (b_{ij}) とし，V^* に対して (a_{ij}) とする．$1 \le i_1 < i_2 \le n$，$1 \le j_1 < j_2 \le n$ に対して，

$$(2)\quad b_{i_1j_1}b_{i_2j_2} - b_{i_1j_2}b_{i_2j_1} = 0 \quad \leftrightsquigarrow \quad \det(a_{ij}) = 0$$

• V と V^* を（アフィン多様体として）お互いの余接空間とみなす．$T^*V = V \times V^* = T^*V^*$．対応 (2) のそれぞれの方程式を余接空間での特性多様体とみなしてのそれぞれの微分方程式は次の (3) のようになる．物理的にいえば「量子化」である．

(2) と (3) の対応はクロスしていることに注意する．左側は単独線形 n 階偏微分方程式であり，右側は連立線形 2 階偏微分方程式である．右側の方程式は超幾何微分方程式の主要部であり，その種（たね）はセグレ埋め込みに起源を発する．

$$(3)\quad \det\left(\frac{\partial}{\partial b_{ij}}\right)\phi = 0 \quad \leftrightsquigarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial a_{i_1j_1}}\frac{\partial}{\partial a_{i_2j_2}} - \frac{\partial}{\partial a_{i_1j_2}}\frac{\partial}{\partial a_{i_2j_1}}\right)\psi = 0$$

右側の方程式の解は，行列式におけるラプラス (Laplace) の展開定理によって，左側の方程式の解にもなっている．これらの方程式の解の構成は，ラドン (Radon) 変換の考え方を適用することによってできる．

ノート　超幾何微分方程式とは，ゲルファント (Gelfand) の意味で，さらに不変性，同次性の無限小である 1 階偏微分方程式系を加えたもので，解空間は有限次元である．

• 余接空間を関数の 1 階微分の空間と思えば，対応 (1), (2) から次の 1 階偏微分方程式の対応 (4) がいえる．物理的にいえば対応 (3) の「準古典近似」でアイコナール方程式である．左側は単独非線形 1 階偏微分方程式であり，右側は連立非線形 1 階偏微分方程式系である．左側の単独方程式に注目して，コーンに付随した微分方程式として，さらに 4.1.3 以降議論していく．

$$(4) \quad \det\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial b_{ij}}\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial a_{i_1 j_1}}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial a_{i_2 j_2}} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial a_{i_1 j_2}}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial a_{i_2 j_1}} = 0$$

ノート　シュレーディンガー (Schrödinger) 方程式において，プランク (Planck) 定数 $\hbar$ を 0 に近づけたときの漸近展開を準古典近似というが，バーコフ (Birkhoff) の式の位相の微分方程式として，アイコナール方程式と呼ばれるハミルトン - ヤコビ方程式が得られる．

4.1.3　コーン場に付随した微分方程式

いままでの議論は，曲がった空間から見れば線形化された空間での話であった．

M を n 次元多様体とし，K を M 上の k 次元コーン場，すなわち，$K_m \subset T_mM$ $(m \in M)$ はスカラー不変（k 次元）部分集合であり，そして各 K_m は微分同相であるとする．コーン場を幾何構造としてとらえたとき，コーン構造ともいう．そのとき，射影化されたコーンのファイバー $L^{k-1} = P(K_m)$ をもつファイバー束ができる．

$$\begin{array}{ccc} L^{k-1} & \longrightarrow & Z^{n+k-1} = P(K) \subset P(TM) \\ & & \downarrow \pi \\ & & M^n \end{array}$$

コーン場から，射影双対を通して，1 階偏微分方程式を構成しよう．接空間 T_mM $(m \in M)$ を一般のベクトル空間 V^n と考えて，V_1 を 1 次元部分空

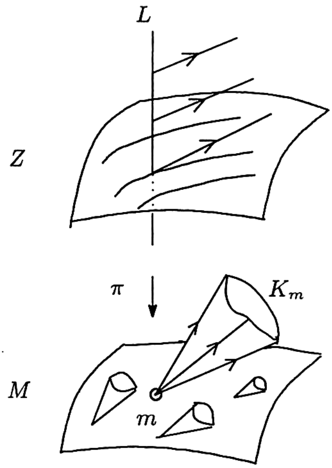
間，V_{n-1} を $(n-1)$ 次元部分空間とする．次の射影双対図式をもつ．

$$
\begin{array}{ccc}
 & I_L = \{(V_1, V_{n-1}) \mid V_1 \subset V_{n-1}\} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{n-1} = \{V_1\} & & (P^{n-1})^* = \{V_{n-1}\} \\
(x_i) & \rightsquigarrow & (p_i) \\
\cup & & \cup \\
L & & L^\vee
\end{array}
$$

$L^\vee$ が $(P^{n-1})^*$ の超曲面であるとき，$L^\vee = D(L)$ であり，$D(L)$ の定義方程式 $F(p_i) = 0$ は判別式 $D_L = 0$ である．$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right) = k$ をもつ．点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，M 上のファイバー $L^{k-1}(\subset P^{n-1})$ をもつファイバー束 $Z^{n+k-1}(\subset P(TM))$ から，射影双対によって，M 上のファイバー $D(L)^{n-2}(\subset (P^{n-1})^*)$ をもつファイバー束 $Q^{2n-2}(\subset P(T^*M))$ を得る．

$$
\begin{array}{ccccccc}
L^{k-1} \longrightarrow & Z^{n+k-1}(\subset P(TM)) & \rightsquigarrow & (P(T^*M) \supset) Q^{2n-2} & \longleftarrow D(L)^{n-2} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & M^n & &
\end{array}
$$

すなわち，コーン場に付随した独立変数と従属変数を区別しない大域的な単独 1 階偏微分方程式が得られる．$P(T^*M)$ 上の標準的な接触分布と Q の接空間が横断的であるとき，Q 上に特性方向場と呼ばれる直線方向場が決まる．ダブル・ファイバー束を通して，Z 上にも直線方向場が決まり，M 上にコーンの母線方向に対してのパス幾何が定義される．



すぐわかる例として，（退化した）k 次元の 2 次コーン場から（退化した）アイコナール方程式 $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{k-1}^2 - p_k^2 = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ が得られる．どれかの座標を従属変数と思えば，例えば，$x_k = z$, $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ とすると，$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial z}{\partial x_{k-1}}\right)^2 = 1$ である．

〔例〕 2 階クレロー方程式で出てきたツイスター図式をもう一度取り上げよう．接触形式 $\omega = dy - pdx$ をもつ $M^3 = J^1(1,1) : (x,y,p)$, 結合空間 $Z^4 = J^2(1,1)$, そして $(2,1)$ 型共形構造 $[g]$, $g = 4dadc - db^2$, をもつ $N^3 : (a,b,c)$ に対して，次のエンゲル - ルジャンドル双対性をもつ(再掲)．

$$\begin{array}{ccccc} q & \longrightarrow & Z : (x,y,p,q) \leftrightsquigarrow (a,b,c,t) & \longleftarrow & t \\ & \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 & \\ M : (x,y,p) & & & & N : (a,b,c) \end{array}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \\ p = 2at + b \\ q = 2a \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}q \\ b = -xq + p \\ c = \dfrac{1}{2}x^2 q - xp + y \\ t = x \end{cases}$$

左側の式は M でのルジャンドル直線の式を表し，$J^0(1,1):(x,y)$ に射影すれば放物線を表す．右側の式は N でのヌル直線の式を表す．N において 2×2 対称行列座標系 $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ をとるならば，g は行列式で表される．背景には，N はラグランジュ - グラスマン構造（後述の 4.2.2）をもつことがある．N 上には，共形構造から誘導されるヌル・コーン場 K が定義され，射影化されたコーン場は $L = P(K) = P^1$ である．複素カテゴリーでもよい．

N において，不変な 2 次元コーン K を表す式は 2 次式 $4ac-b^2=0$ である．P^2 の双対な $(P^2)^*$ の同次座標系を (p_1,p_2,p_3) とすると，射影化されたコーン $L = P(K) \subset P^2$ の射影双対は 2 次曲線 $L^\vee = D(R)$ となり，

$$p_1 p_3 - p_2^2 = 0$$

と表される．ここで，ϕ（未知関数）とし，$p_1 = \frac{\partial\phi}{\partial c}$, $p_2 = \frac{\partial\phi}{\partial b}$, $p_3 = 1$ とおくと，コーン場 K に付随した 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial\phi}{\partial c} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial b}\right)^2 = 0$$

が得られる．

次に，解をエンゲル - ルジャンドル双対性を通して構成しよう．つねに 3.2.2 の図 (p.148) を見よ．ヌル・クレロー方程式を構成したときと同様な方法である．任意の関数 $y = f(x)$ をとり，$p = f'(x)$ から，M におけるルジャンドル曲線 $C:(x,f(x),f'(x))$ を考える．その Z への曲線の逆像 ${\pi_1}^{-1}(C)$ である Z に

おける曲面 $S' : (x, f(x), f'(x), q)$ から(持ち上げる), エンゲル-ルジャンドル双対性をとると $(\frac{1}{2}q,\ -xq+f'(x),\ \frac{1}{2}x^2q-xf'(x)+f(x),\ x)$ となり(ねじる), N への射影 $\pi_2(S')$ から曲面 $S : (\frac{1}{2}q,\ -xq+f'(x),\ \frac{1}{2}x^2q-xf'(x)+f(x))$ を得る(下へ落とす). これから $\frac{1}{4}\frac{\partial a}{\partial c} = (\frac{\partial a}{\partial b})^2$ がわかり, $\phi = 4a$ は微分方程式の一般解となる. 完全解である平面 $\phi = \alpha b + \alpha^2 c + \beta$ $(\alpha, \beta$: 定数) において, 一般解は $\beta = g(\alpha)$ とした α の 1-パラメータの平面族の包絡面である. 完全解のリフトは Z において葉層をなす. 特異解は存在しない.

N 上のヌル・コーンの母線方向に対してのパス幾何は, 上記の一般解 S の q 方向によって定義され, 3.2.2 で述べた平坦ヌル・パス幾何に他ならない. また, 特異点は $q = f''(x)$ より, C の双対曲線 $\tilde{C}$ である. 3.2.2 の図を見よ.

注意 ここでの解の構成は, 3 節でのクレロー方程式の構成と同じ考え方である. ただ, 一般解, 特異解は, ここではそれぞれ完全解, 一般解に対応していることに注意する.

4.2 退化した 2 階偏微分方程式

4.2.1 グラスマン射影双対

V^n を複素 n 次元ベクトル空間とし, $P^{n-1} = P(V)$ を V の射影空間とする. X^{k-1} を P^{n-1} の $k-1$ 次元部分多様体とし, 以下, 代数多様体としておく. $R(X)$ を, P^{n-1} において X と交わる $(n-k-1)$ 次元部分空間全体の集合とする. X と交わるというときは, 横断的に交わらなくてもよい. $R(X)$ は, P^{n-1} での $(n-k-1)$ 次元部分空間全体の $k(n-k)$ 次元のグラスマン多様体 $G_{n-k,n}$ の部分集合である. $R(X)$ は X に**グラスマン射影双対**であるという.

射影双対性の反射性と似たようなことがいえる. $X^{k-1} \subset P^{n-1}$ は $R(X) \subset G_{n-k,n}$ によって一意に決定される. $x \in P^{n-1}$ が X に属することと, x を含む $(n-k-1)$ 次元部分空間 Π が $R(X)$ に属することは同値である.

X の射影双対な $X^\vee$ は必ずしも P^* において超曲面ではないが，X のグラスマン射影双対な $R(X)$ は $G_{n-k,n}$ の超曲面である．1 点 $x \in X$ で交わる $(n-k-1)$ 次元空間全体は $G_{n-k-1,n-1}$ であることに注意すると，次元勘定は $k(n-k-1)+(k-1)=k(n-k)-1$ となる．グラスマン射影双対な $R(X)$ を X の**終結多様体** (resultant variety) という．定義方程式を X の終結式といい，R_X と表す．

われわれは，X と $R(X)$ の間の次のダブル・ファイバー束をもつ．

$$\begin{array}{ccc} & I_X \ (\subset P^{n-1}\times G_{n-k,n}) & \\ \pi \swarrow & & \searrow \rho \\ (P^{n-1}\supset)\ X & \leftrightsquigarrow & R(X)\subset G_{n-k,n} \end{array}$$

結合空間 I_X は $\{(x,\Pi) \mid x \in X,\ x \in \Pi\}$ である．

〔**例 1**〕 X を P^3 での曲線 $(\dim X = 1)$ とするならば，$R(X)$ は $G_{2,4}$（P^3 のすべての直線全体）での 3 次元超曲面で，X と交わるすべての直線全体である．

〔**例 2**〕 X を P^{n-1} での超曲面 $(\dim X = n-2)$ とするならば，$R(X)$ は $G_{1,n} = P^{n-1}$ での X 自身である．

〔**例 3**〕 $X = \{p\}$ を P^{n-1} での 1 点とすると，$R(X)$ は $G_{n-1,n} = (P^{n-1})^*$ での p に双対な超平面である．

V での $(n-k)$ 次元部分空間を与えることは，ある k 個の 1 次形式 $f_1,\cdots,f_k$ の零点を与えることだから，次がわかる．

$$X \cap \{f_1 = \cdots = f_k = 0\} \neq \emptyset \iff R_X = 0$$

いま，V を $\dim V = k$ で座標系 $x = (x_1,\cdots,x_k)$ をもつとする．そして，S^dV を V の次数 d の対称積とする．次元は $n = {}_kH_d = \binom{k+d-1}{d}$ である．$(S^dV)^* = S^dV^*$ は k 変数の d 次同次多項式（対称形式）の空間とみなされ

る．$X = P^{k-1} = P(V)$ を考える．X から $P^n = P(S^dV)$ への**ベロネーゼ埋め込み** (Veronese embedding) を次のように定義する．

$$\varphi : X = P^{k-1} = P(V) \longrightarrow P^{n-1} = P(S^dV), \quad [v] \mapsto [v^d = v \odot \cdots \odot v]$$

$f = A = (a_{i_1 \cdots i_d})$ (対称) $\in (S^dV)^*$ を $\hat{X}$ 上に制限すれば，k 変数の d 次同次多項式 $f(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i_1, \cdots, i_d = 1}^{k} a_{i_1 \cdots i_d} x_{i_1} \cdots x_{i_d}$ をもつ．したがって，$R_X = 0$ は k 個の k 変数の d 次同次多項式の非自明な共通解をもつことを意味する．

4.2.2　退化したモンジュ - アンペール方程式

グラスマン射影対応の特別なものとして，2 階微分との関係から，ラグランジュ - グラスマン接触射影対応を考える．

W^{2n} をシンプレクティック形式 Ω をもつシンプレクティック・ベクトル空間とする．その上で $\Omega = 0$ になる n 次元イソトロピックな部分空間をラグランジュ部分空間という．すべてのラグランジュ部分空間全体をラグランジュ - グラスマン多様体といい，$LG_{n,2n} (\subset G_{n,2n})$ と表す．次元は $\frac{n(n+1)}{2}$ である．

いま，V^{2n+2} をシンプレクティック形式 Ω_0 をもつシンプレクティック・ベクトル空間とする．そのとき，V の射影空間 $P^{2n+1} = P(V)$ は接触構造 D をもつ接触射影空間である．接触構造 D とは，非退化な階数 $2n$ をもつ分布 D のことである．D を零化する 1 形式 ω $(\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0)$ を接触形式という．外微分した 2 形式 $d\omega$ は D_x $(x \in P^{2n+1})$ 上のシンプレクティック形式を定める．もちろん接触形式のスカラー倍によらない．各点 $x \in P^{2n+1}$ での D_x で，すべてのラグランジュ部分空間全体であるラグランジュ - グラスマン多様体 $LG(D_x) = LG_{n,2n}$ が考えられる．

ダルブー (Darboux) の定理によって，局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n)$ をもつ 1-ジェット空間 $J^1(n,1) \subset P^{2n+1}$ を考えることができる．z は関数値

にあたり，p_i は z の 1 階偏微分に対応する．$\omega = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ は接触形式である．

さらに 2-ジェット空間 $J^2(n,1)$ を考えれば，局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n, z, p_1, \cdots, p_n, p_{ij})$ をもつ．p_{ij} は，z の 2 階偏微分に対応して，$p_{ij} = p_{ji}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ を満たす．それらはラグランジュ - グラスマン多様体 $LG_{n,2n}$ の局所座標であり，グラスマン多様体での行列座標系においては対称行列で表されるものである．

一般に，$W(\cong \boldsymbol{C}^{2n})$ を，座標系 $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ をもちシンプレクティック形式 $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$ と表されるシンプレクティック・ベクトル空間とする．W でのラグランジュ部分空間全体であるラグランジュ - グラスマン多様体 $LG_{n,2n} \subset G_{n,2n}$ は，$P^{2n-1} = P^{2n-1}(W)$ での（接触分布でのラグランジュ部分空間に接する）ルジャンドル平面 $(\cong P^{n-1})$ 全体に他ならないことに注意する．

P^{2n-1} での非同次座標系 $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = 1, y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n)$ と，$LG_{n,2n}$ での対称行列座標系 (a_{ij}), $a_{ij} = a_{ji}$, を考えて，次のラグランジュ - グラスマン接触射影双対なツイスター図式をもつ．W での，V_1 を 1 次元(イソトロピック)部分空間，V_n を（n 次元）ラグランジュ部分空間とする．

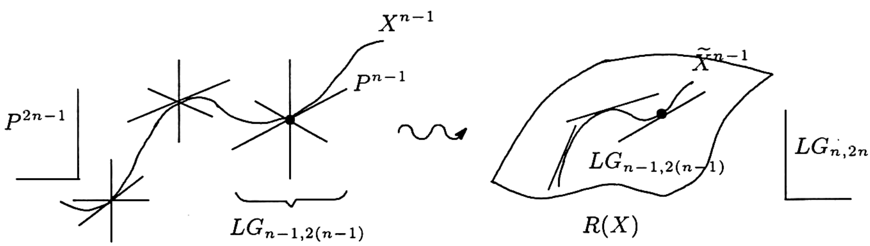
$$
\begin{array}{ccc}
 & I = \{(V_1, V_n) \mid V_1 \subset V_n\} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{2n-1} = \{V_1\} & \rightsquigarrow & LG_{n,2n} = \{V_n\} \\
(x_i, y_i) & & (a_{ij})
\end{array}
$$

結合空間 I を定義する結合関係式は，

$$
y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n
$$

である，ここで $x_n = 1$. これは，接触形式 $\omega = dy_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i dy_i - y_i dx_i)$ に関するルジャンドル平面の式を表している．

W をアフィン多様体として，$\hat{X}$ を W でのラグランジュ・コーン部分集合とする．$\hat{X}$ の射影化である X は接触射影空間 P^{2n-1} でのルジャンドル部分多様体である．そのとき，P^{2n-1} において X と交わるルジャンドル平面全体の集合は X に**ラグランジュ - グラスマン接触射影双対**であるという．$(n-1)$ 次元平面全体との交わりのグラスマン射影双対と同様に，これも X の終結多様体といい，$R(X)$ と表す．$R(X)$ は $LG_{n,2n}$ の超曲面である．1 点 $x \in X$ で交わるラグランジュ部分空間全体は $LG_{n-1,2(n-1)}$ であることに注意すると，次元勘定は $\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ となる．



図において：P^{2n-1} での黒い点は $LG_{n-1,2(n-1)}$ に対応し，$LG_{n,2n}$ での黒い点を通る直線である．$LG_{n,2n}$ での黒い点は，X^{n-1} の黒い点でのルジャンドル接平面 P^{n-1} に対応する．そのとき，$R(X)$ での曲線は X^{n-1} の双対な $\tilde{X}^{n-1}$ ($R(X)$ での特異点) に対応する．その接線が $LG_{n-1,2(n-1)}$ に対応する．

$\hat{X}(\cong \boldsymbol{C}^n)$ を $y_1 = \cdots = y_n = 0$ である W でのラグランジュ部分空間とし，$X = P^{n-1}$ を接触射影空間 P^{2n-1} での $\hat{X}$ の射影化であるルジャンドル平面とする．そのとき，$LG_{n,2n}$ での超曲面である終結多様体 $R(X)$ のコーン化 $\widehat{R(X)}$ を定義する終結式 $R_X = 0$ は，$n \times n$ 対称行列の行列式 $= 0$ である．なぜなら，結合関係式より，$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(1 \leq i \leq n)$ が非自明な解をもつ条件だからである．ちなみに，$\widehat{R(X)}$ の射影双対 $(\widehat{R(X)})^\vee$ は階数 1 以下の正方行列となることに注意する．

前半の部分の話に戻れば，退化したモンジュ-アンペール (Monge-Ampère) 方程式

$$\boxed{\mathrm{Hess}(z) = \det(p_{ij}) = 0}$$

を得る，ここで $p_{ij} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$.

4.2.3 ラグランジュ・コーン場に付随した微分方程式

M を接触分布 D をもつ $(2n+1)$ 次元接触多様体とし，K をラグランジュ・コーン場，すなわち，$K_m \subset D_m$ $(m \in M)$ はスカラー不変 (n 次元) ラグランジュ部分集合であり，そして各 K_m は微分同相であるとする．そのとき，射影化されたラグランジュ・コーンのファイバー $L^{n-1} = P(K_m)$ をもつファイバー束ができる．

$$\begin{array}{ccc} L^{n-1} & \longrightarrow & Z^{3n} = P(K) \subset P(D) \subset P(TM) \\ & & \downarrow \pi \\ & & M^{2n+1} \end{array}$$

ラグランジュ・コーン場から，ラグランジュ-グラスマン接触射影双対を通して，2 階偏微分方程式を構成しよう．D_m $(m \in M)$ はシンプレクティック形式 $\Omega = d\theta$ $(D = \mathrm{Ker}\ \theta)$ をもつシンプレクティック・ベクトル空間であるので，一般のシンプレクティック・ベクトル空間 (V^{2n}, Ω) を考える．V_1 を 1 次元部分空間，V_n をラグランジュ部分空間とする．次のラグランジュ-グラスマン接触射影双対図式をもつ．

$$\begin{array}{ccc} & I_L = \{(V_1, V_n) \mid V_1 \subset V_n\} & \\ \swarrow & & \searrow \\ P^{2n-1} = \{V_1\} & & LG^{\frac{n(n+1)}{2}} = \{V_n\} \\ (x_i, p_i) & \rightsquigarrow & (p_{ij}) \\ \cup & & \cup \\ L & & R(L) \end{array}$$

$L = P(K_m)$ は，接触射影空間 P^{2n-1} のルジャンドル部分多様体である．L と交わるルジャンドル平面全体の終結多様体 $R(L)$ は，$LG_{n,2n}$ の超曲面である．$R(L)$ の定義方程式 $F(p_{ij}) = 0$ は終結式 $R_L = 0$ である．$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}$ 係数の 2 次形式は階数 1 で退化する．点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，M 上のファイバー $L^{n-1}\,(\subset P^{2n-1})$ をもつファイバー束 $Z^{3n}\,(\subset P(D) \subset P(TM))$ から，ラグランジュ - グラスマン接触射影双対によって，M 上のファイバー $R(L)\,(\subset LG)$ をもつファイバー束 $Q\,(\subset LG(D))$ を得る．

$$\begin{array}{ccccc} L^{n-1} \longrightarrow Z^{3n}(\subset P(D) \subset P(TM)) & \rightsquigarrow & (LG(D) \supset)\, Q \longleftarrow R(L) \\ \searrow & & \swarrow \\ & M^{2n+1} & \end{array}$$

すなわち，ラグランジュ・コーン場に付随した独立変数と従属変数を区別しない大域的な単独 2 階偏微分方程式が得られる．$(\widehat{R(L)})^{\vee}$ は階数 1 だから，Q 上に特性方向場と呼ばれる直線方向場が決まる．ダブル・ファイバー束を通して，Z 上にも直線方向場が決まり，接触多様体 M 上にラグランジュ・コーンの母線方向に対してのパス幾何が定義される．

すぐわかる例として，前節で述べた退化したモンジュ - アンペール方程式 $\det(p_{ij}) = \mathrm{Hess}(z) = 0$ がある．有名なラプラス方程式 $\sum p_{ii} = 0$ と比較せよ．

注意　線形代数での退化な（正則でない）行列，すなわち，行列式 $= 0$ に対して，退化したモンジュ - アンペール方程式が対応する．この退化した偏微分方程式は，常微分方程式を解くことに帰着される．一般のラグランジュ・コーン場に付随した 2 階偏微分方程式は曲がったもの (curved version) と思える．

洒落　退化しているところに，意外と面白いこと，新しいことが見出される．これを「退化」の改新と言いたい．

〔例〕　接触形式 $\omega = dz - pdx - qdy$ と接触分布 $D = \mathrm{Ker}\,\omega$ をもつ 1-ジェット

空間 $M^5 = J^1(2,1) : (x,y,z,p,q)$ を考える．接触分布 D は階数 4 だから，ラグランジュ・コーン場 K は 2 次元である．射影化されたラグランジュ・コーン $L = P(K_m)$ $(m \in M)$ は，3 次元接触射影空間 $P^3 = P^3(D_m)$ でのルジャンドル曲線である．P^3 での非同次座標系を (u,v,w) とし，接触形式を $\omega_0 = dw+udv-vdu$ と表すと，(m : 非負の整数として)

$$u \longmapsto (u, u^m, -\frac{m-1}{m+1}u^{m+1})$$

はルジャンドル曲線 L である．L のラグランジュ - グラスマン接触射影双対 $R(L)$ は，3 次元の $LG^3 = LG_{2,4} \subset G_{2,4}$ での（双対曲線 $\tilde{L}$ の接線）曲面である．

$$P^1 \supset \boldsymbol{C} \longrightarrow L \subset P^3 \quad \rightsquigarrow \quad R(L) \subset LG^3$$

$m = 2$ の場合の 3 次曲線 $L : (u, u^2, -\frac{1}{3}u^3)$ に付随した偏微分方程式を求めよう．一般的にルジャンドル直線は

$$v = au + b, \quad w = bu + c$$

(a,b,c : 定数）と表されるから，$R(L)$ を定義する終結式 R_L は次の二つの式の共通解をもつ条件である．

$$\begin{cases} f_1 = u^2 - au - b = 0 \\ f_2 = u^3 + 3bu + 3c = 0 \end{cases}$$

シルベスター (Sylvester) 行列式を使って，

$$R_L = R(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & & \\ & 1 & -a & -b & \\ & & 1 & -a & -b \\ 1 & 0 & 3b & 3c & \\ & 1 & 0 & 3b & 3c \end{vmatrix}$$

$$= 9c^2 - (16b^3 - 18abc) + 3a^2(ac - b^2) = 0,$$

ここで，行列式の中の空白部分は0である．よって，$R(L)$ は LG^3 での4次超曲面である．点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，2階偏微分方程式が得られる．$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ とおき，a を t，b を s，c を r に置き換えることによって，退化した2階偏微分方程式を得る．

$$F(r,s,t) = 9r^2 - (16s^3 - 18rst) + 3t^2(rt - s^2) = 0$$

$m=3$ の場合の4次曲線 $L: (u, u^3, -\frac{1}{2}u^4)$ のルジャンドル曲線に対するラグランジュ - グラスマン接触射影双対 $R(L)$ は，同様な方法で，LG^3 での5次超曲面である．

$$8c^3 + (27b^4 - 32ab^2c + 8a^2c^2) + 2a^3(ac - b^2) = 0$$

点 $m \in M$ から全体の M へ広げることによって，退化した2階偏微分方程式を得る．

$$F(r,s,t) = 8r^3 + (27s^4 - 32rs^2t + 8r^2t^2) + 2t^3(rt - s^2) = 0$$

ノート　任意の非負整数 m に対して，P^3 での各ルジャンドル曲線 L は（接触分布を保つ）接触微分同相である，すなわち，m は不変量ではない．しかし，(射影)シンプレクティック変換群 $Sp(2, C)$ のもとで，m は不変量となる．そのとき，M での付随した2階偏微分方程式は接触変換ではうつり合わない．

次に，解の構成を双対性を通して構成したいのであるが，準備に紙数を要するので割愛して，M^5 上にラグランジュ・コーンの母線方向に対してのパス幾何を述べよう．M での接触形式 $\omega = dz - pdx - qdy$ に関する接触分布 D は，$\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial q}$ によって張られる．$P^3(D_m)$ $(m \in M)$ での非同次座標系 (u, v, w) は，$1 \cdot (\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}) + u(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}) + w\frac{\partial}{\partial p} + v\frac{\partial}{\partial q}$ である．射影化されたラグランジュ・コーンである P^3 でのルジャンドル曲線 L は，パラメータ u を局所座標としてもつ．M 上のファイバー $L (\subset P^3)$ を

もつファイバー束 $Z^6\,(\subset P(D)\subset P(TM))$ は，局所座標系 (x,y,z,p,q,u) をもつ．Z から M への自然な射影を π と表す．3.1 で述べたパス幾何を構成したときと同様な方法で，Z 上に階数 2 の分布 $\mathcal{D}$ をもつ：$l\in Z$ において，$\mathcal{D}_l=\pi_*^{-1}(l)\subset T_lZ$ である，すなわち，

$$\mathcal{D}_l=\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)+w\frac{\partial}{\partial p}+v\frac{\partial}{\partial q},\ \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle\subset T_lZ.$$

さらに，Z でのファイバーの u 方向である垂直方向 $\langle\frac{\partial}{\partial u}\rangle$ の $\mathcal{D}$ における補空間を与えるベクトル場

$$E=\xi\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)+w\frac{\partial}{\partial p}+v\frac{\partial}{\partial q}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial u}\subset\mathcal{D}\quad(\xi\neq0)$$

をとる．水平方向を定めて，Z 上に $\mathcal{D}$ 方向の部分接続を与える．そのとき，ベクトル場 E の Z での積分曲線ができる．その π による射影は，M 上の $\mathcal{D}$ 方向に制限されたパス幾何 $\mathcal{C}$ を定義する．このパス幾何を**モンジュ・パス幾何**といおう．垂直方向に横断的だから，$\xi=1$, $\eta=f(x,y,z,p,q,u)$ とおくことができる．そのとき，$E=\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial y}+(p+uq)\frac{\partial}{\partial z}+w\frac{\partial}{\partial p}+v\frac{\partial}{\partial q}+f\frac{\partial}{\partial u}$ と $L:u\longmapsto(u,v,w)=(u,u^m,-\frac{m-1}{m+1}u^{m+1})$ から，Z 上のベクトル場 E は，M 上の独立変数 x の拘束された 2 階常微分方程式

$$y''=f(x,y,z,p,q,y'),\quad z'=p+qy',\quad p'=-\frac{m-1}{m+1}(y')^{m+1},\quad q'=(y')^m$$

を定義する．$f=0$ をとるならば，M での解曲線は，$(x,y,z,p,q)=(x,\,ax+b,\,\frac{1}{m+1}a^{m+1}x^2+(c+d)x+e,\,-\frac{m-1}{m+1}a^{m+1}x+c,\,a^mx+d)$ $(a,b,c,d,e$ は定数$)$ なるラグランジュ・コーン（の母線）方向に制限されたルジャンドル直線である．そのときのパスを平坦モンジュ・パスという．パス全体の空間は 5 次元である．ここでの 2 階偏微分方程式の解は，平坦モンジュ・パスが織り込まれて作られている．

5 おわりに

● この小論でのパス幾何やコーン構造との絡みであつかった微分方程式は，かなり特殊で退化したものではあるが，幾何的にみるとかなり面白いと思われる．ツイスター理論や射影双対，グラスマン射影双対などの幾何を媒体にして，微分方程式自身や解の構成を作り上げていくのである．

この小論では，わかりやすく理解してもらうために議論を座標によってきた．もちろん内在的に，あるいは大域的に議論を展開していくことができる．平坦なツイスター理論においては，自己同型群で不変なあつかいができる．

パスから常微分方程式が得られ，また解が包絡していることからコーンは偏微分方程式に関わっている．パスとコーンは密接な関係にあり，コーンの各母線をパスの方向としてとらえる．原点から出ている母線たちを結合空間へリフト（持ち上げ）することによって，それらを解きほぐしてパスにするのである．1階偏微分方程式を解くことが常微分方程式を解くことに帰着されるのは，この原理によっているのである．2階偏微分方程式では，このことはもう望むべくもない．しかし，ここでの2階偏微分方程式ではこの原理が適用できるのである．なお，カルタンの特性系理論があることを付記しておく．

巷間よく知られた比較の比例式がある．

量子力学：古典力学 ＝ 波動光学：幾何光学

＝ 偏微分方程式：常微分(陪特性)方程式

さらに等式として，「＝コーン構造：パス幾何」を加えたい．微分方程式の範疇に，ツイスター理論を媒介にして，幾何構造を付け加えようというのである．是非は如何？

● いままで筆者が冒頭で述べた三位一体を念頭におきながらあつかって

きた微分方程式は，本論の退化したもの以外に非退化な2階偏微分方程式として，ラプラス方程式，超幾何方程式，モンジュ - アンペール方程式などである．

ツイスター理論の物理としての最近の話は，是非はともかくウイッテン(Witten) のツイスター・ストリングがある

セグレ埋め込みのとらえ方が量子情報理論にある．V を $\boldsymbol{C}^2$ として r 個のテンソル積である量子 r-ビットにおいて，分解可能ベクトルである純粋状態から射影双対なエンタグルメント（量子もつれ）への関係をみるのである．

● 　ツイスター理論の豊かな果実を実らせる豊饒な土地は旗多様体である．自己同型群 $G = SL(n+1)$ のリー代数は $g = sl(n+1)$ であり，A_n 型といわれ，そのときの旗多様体は A_n 型という．ベクトル空間上に（非退化)内積を付加して，ヌル部分空間の旗からなる旗多様体は，V が奇数次元 $2n+1$, 偶数次元 $2n$ に対応して，B_n 型，D_n 型という．$2n$ 次元ベクトル空間上にシンプレクティック形式を付加して，イソトロピック部分空間の旗からなる旗多様体は，C_n 型という．

・ 3.1.1 からの発展　次の段階では，適当な同値関係のもとで局所同値問題が考えられる．一般化として，$M^n = J^0(1, n-1) = \boldsymbol{R}^n$ から A_n 型パス幾何が考えられる．

・ 3.1.2 からの発展　上記と同様に，局所同値問題や，一般化の $M^{2n-1} = J^1(1, n-1) = \boldsymbol{R}^{2n-1}$ から C_n 型パス幾何が考えられる．

・ 3.2.1 からの発展　直線群をいろいろな次元の平面群として，いろいろな型のクレロー方程式に拡張できる．方程式は，常微分，偏微分であったり，単独，連立であったり，非拘束，拘束であったりする．[M2] を参照．

一般化として，A_n 型クレロー方程式が考えられる．1階クレロー方程式は A_2 型に対応する．

・3.2.2 からの発展　一般化として，C_n 型クレロー方程式が考えられる．ルジャンドル・クレロー方程式は C_2 型に対応する．B_n, D_n 型クレロー方程式も考えられる．ヌル・クレロー方程式は B_2 型に対応する．

・4.1.3 からの発展　旗多様体のエルミート (Hermite) 対称空間における不変コーン構造，および射影双対の判別多様体が分類されている．そのことから，コーン場に付随した 1 階偏微分方程式が構成される．解の構成が，ある種のツイスター図式を通しておこなわれる．

・4.2.3 からの発展　接触旗多様体における不変 3 次ラグランジュ・コーン構造が，C 型を除いて，退化した A 型，可約な BD 型，既約な例外型として存在する．そのことから，ラグランジュ・コーン場に付随した 2 階偏微分方程式が構成される．解の構成が，モンジュ・パス全体の空間とのツイスター図式を通しておこなわれる．

謝辞　阿賀岡芳夫さん，石川剛郎さんには，原稿を丁寧に読んでいただき，貴重なご指摘を細かくして下さり，深く感謝の念に堪えません．また，森本 徹さん，高橋雅朋さんにも助言をもらいました．紙上を借りて，以上の方々にお礼申し上げます．

参考文献

[P-R] R. Penrose and W. Rindler : *Spinors and space-time*, Vol.I, II, Cambridge Univ. Press, 1984, 1986.

[W-W] R.S. Ward and R.O. Wells, Jr. : *Twistor geometry and field theory*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[B-E] R.J. Baston and M.G. Eastwood : *The Penrose tranform*, Clarendon Press, 1989.

[M-W] L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse : *Integrability, self-duality, and twistor theory*, Clarendon Press, 1996.

[Ta] 高崎金久：ツイスターの世界，共立出版，2005.

以上が，ツイスター理論のわかりやすい一般的な本であろう．[P-R] は，ペンローズ自身の手によるものである．[B-E] は表現論，[M-W] は可積分系に関連したものである．[Ta] は，唯一の和書でわかりやすく書かれている．

[I-L] T.A. Ivey and J.M. Landsberg : *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, American Math. Soc., 2003.

[I-I] 泉屋周一・石川剛郎：応用特異点論，共立出版，1998.

以上が，パスを勉強するときの土台作りになる．微分方程式を幾何と結びつける橋渡しの勉強にもなる．

[G-K-Z] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov and A.V. Zelevinsky : *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

いわゆる GKZ の新しい超幾何関数を作っていこうとする本であるが，判別式や終結式の項は十分一読に値する．

ツイスター理論と微分方程式を結びつける本論の議論に関しては，いろいろな場での発表や以下を参考にしている．

[M1] Y. Machida : *Goursat equations and twistor theory —two dualities—*, RIMS 講究録，1502 (2006), 125–139.

[M2] Y. Machida : Clairaut 方程式とツイスター理論，RIMS 講究録，1664 (2009), 56–67.

[M3] Y. Machida : コーン場に付随した微分方程式，Symplectic Geometry とその周辺，大垣研究集会，2007, 64–70.

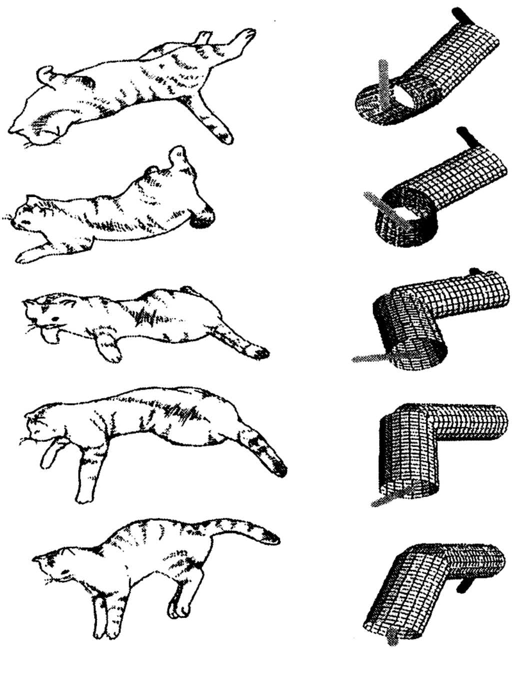
宙返りの奥義

幾何，力学，制御

岩井 敏洋

概 要

猫の宙返りは面白くて，奥が深い．猫は，全角運動量ゼロで，つまり，全体的には各瞬間で回転せずに，しかし結果として回転を実現させている．これが宙返りの奥義である．これを理解するには，微分幾何学，解析力学，制御理論からの考察が必要となる．本稿ではコンパクトに宙返りの奥義を解説してみたいと思う．



1　はじめに

筆者が猫の宙返りに興味をもったのは，猫の宙返りそのものがきっかけではなかった．同僚と分子の量子力学の共同研究を始めたのがそもそもの興味の始まりであった．分子の量子力学においてよく用いられるボルン - オッペンハイマー近似によれば，分子を構成する原子核が，分子を包む衣のような電子雲の中を運動するというイメージでシュレーディンガー方程式が書かれる．問題は，分子の形を決める結合角や結合手の長さなどのパラメータ（内部座標という）でシュレーディンガー方程式を書き下すことができるかというところにある．適当に原点を決めて，各原子核の位置座標（デカルト座標）を用いてシュレーディンガー方程式を書き下すのは簡単であるが，内部座標で書き下すには工夫がいる．その工夫とは，微分幾何学の中で発展してきた概念である「接続」を利用することである．接続の理論は理論物理学の中でも重要な役割を果たしていて，「ゲージ理論」と呼ばれて素粒子論での基本的な考え方である．むしろ，素粒子論におけるゲージ理論の考え方が普通の量子力学の中にも現れるという意味で，ゲージ理論の有用性の再発見といえる．

分子は単に多体系とみなせるし，多体系の力学は力学の中でも基本的に重要なものである．まず，分子の内部座標とは何かという問題に数学的に答えなければならない．それは，分子が回転するとはどういうことかを掘り下げて考えることになる基本的な問題でもある．話は少しずれるが，アイデアを得るために三角形の話をする．3 原子分子なら，原子核を頂点とする三角形ができる．この三角形を指定するパラメータが，3 辺，2 角夾辺，2 辺夾角の 3 種類あることは三角形の合同条件としてよく知っている．2 辺夾角は，分子に即して言えば，結合手の長さとその間の角ということになる．そもそも三角形の合同とは何のことであったのかと振り返ってみると，平行移動と回転とで重なり合う二つの三角形を合同というのであった．平行移動は簡単な

ので考察の対象から除くことにすると話が少し見やすくなって，考察すべきは重心を共有するすべての三角形ということになる．この中で重心まわりの回転で重なり合う三角形はすべて合同であり，同じ形をもつ．そして，重なり合うかどうかを判定するのが三角形の合同条件なのである．言い換えると，合同条件は三角形の形を指定するパラメータを与えているのである．つまり，3 辺，2 辺夾角，2 角夾辺は 3 原子分子の内部座標の 3 種類ということになる．

このアイデアを一般化して n 体系の場合を考えれば，重心まわりの回転で重なり合う n 体は合同であるとみなすことができる．これは，分子（n 体系）は回転しても同じ性質をもつはずであるという考え方を数学的に述べているだけである．互いに回転で重なり合う分子に共通するのはその分子の形であるので，逆に，分子の形の概念がこのようにして定義できることになる．分子の回転に関する考察が分子の形を決める手続きを与えたのである．形を指定するパラメータが分子の内部座標となる．最初に述べた，内部座標でシュレーディンガー方程式を書くということは，つまり，デカルト座標で書かれていたシュレーディンガー方程式から，回転の自由度を表す変数を取り払うという作業をすることになる．どうするかというと，「接続」の概念を利用して量子力学的角運動量保存の法則を実行するのであるが，この話にはこれ以上立ち入らないで，多体系の古典力学の話に移る．

多体系をいくつかの集団に分けて，集団の中では互いの相対的位置が変わらないという仮定をおくと，各集団は剛体とみなすことができ，この多体系を剛体系とみなすことができる．猫は決して剛体ではないけれど，剛体系で近似することができる．たとえば，二つの円柱が結合以外の何の役割もしない結合手で連結されているものを猫のモデルとすることができる．このようなモデルでも，重心まわりの回転で重なり合うものを同じ形とみることは可能である．ただし，ここで重なり合うというのは概念的なもので，円柱が剛

体であれば，実際上は重なり合うことはないが，それでも形の概念は定義できる．本稿での猫のモデルは上述の連結2円柱系である．

猫は空中では自分で回転することはできない．鳥のように翼で空気をかくことができないからである．もし，猫が空中に投げ出されたときに回転の勢いがなければ，以後ずっと回転しないままである．それでも猫は宙返りをして，結果として体を回転させることができる．これが宙返りである．回転の勢いは角運動量という量で測られ，外力が働かなければ保存される(時間的に一定である)．(猫は体をひねるのに力を使っているが，そのことで角運動量が保存されなくなることはない.) 角運動量保存則により，当初回転していなければ，その後も猫は空中で回転できないのである．したがって，猫は回転しないで振動だけして，結果として回転を実現させているのである．これは矛盾ではない．たとえ話をする．普通の車は決して直接横に移動はできないが，広い場所でなら，前進でハンドルをきってぐるっと回ってくると元の位置から横に移動した位置に到達できる．途中経過を見ないで最初の位置と最後の位置だけを見ると，車は横に移動したのと同じことになる．横に移動できない車でも，結果として横移動を実現するのである．このように考えると，振動だけで結果として回転が実現できるというのは，まんざら変な考えではないことが納得できるだろう．

接続の理論における「平行移動」の概念が猫の宙返りを理解する上でのキーワードであって，実は平行移動と全角運動量ゼロの運動とが同値になるというところが宙返りのキーポイントである．ここまでが宙返りを理解するための幾何学的準備である．宙返りは力学的現象であるから，次に宙返りの運動方程式を立てなければならない．そして，そこに全角運動量がゼロという拘束を取り込まねばならないのである．運動方程式を立てるにはラグランジュの運動方程式を利用して，さらに入力項を付加すればよいのであるが，全角

運動量ゼロという拘束条件をうまく取り入れるには工夫がいる．ここでも接続の概念が有効に働いて，これをうまく取り込む形でラグランジュの運動方程式を書くと，拘束条件が処理しやすくなる．(分子の量子力学でも猫の宙返りでも「接続」の概念を用いるところが共通点である.) さらに，この連結2円柱系モデルにはモーターが仕込んであって，それによりトルクを働かせて，各円柱の対称軸まわりの回転と結合関節の折り曲げが可能であると仮定する．最後に，トルク入力をどのように決めるべきかは制御の問題である．現実の猫がどのような制御をしているのかは知らないが，ここではポートハミルトン制御を利用しようと思う．その手続きは以下のようになる．まず，すでに得られたラグランジュ形式の運動方程式をハミルトン形式の運動方程式に変換して，ハミルトン方程式にトルク入力項が付加されたものを作る．そして，このトルク入力を決めるために，新たにポテンシャル関数を導入して，新たなハミルトン関数がリャプーノフ関数となるように入力を決める．この方式の制御がポートハミルトン制御である．リャプーノフ関数が存在するということは，モデル猫が最後にはある形をとって静止するということを要請していることになる．ここで言葉遣いに注意がいる．普通のハミルトン力学ではハミルトン関数は保存量（エネルギー保存）であるので，それがリャプーノフ関数となることなどありえない．しかし，いま扱っている制御系ではトルク入力があるので，ハミルトン関数がリャプーノフ関数となって保存されなくなっても不都合ではない．ハミルトン関数という言葉遣いが少し誤解を生みそうなのであるが，制御分野ではこの用語を使っている．言葉遣いに問題はないと思うが，ポートハミルトン制御系の運動方程式がハミルトン方程式ではないということには注意しておくべきである．

2　モデルの幾何学

連結 2 円柱系モデルを幾何学的に準備する．ここからは本格的に数学が始まるので話は簡単ではないが，厳密にモデルを立てるということは，以下のように微分幾何学を駆使するものだとご理解いただきたい．

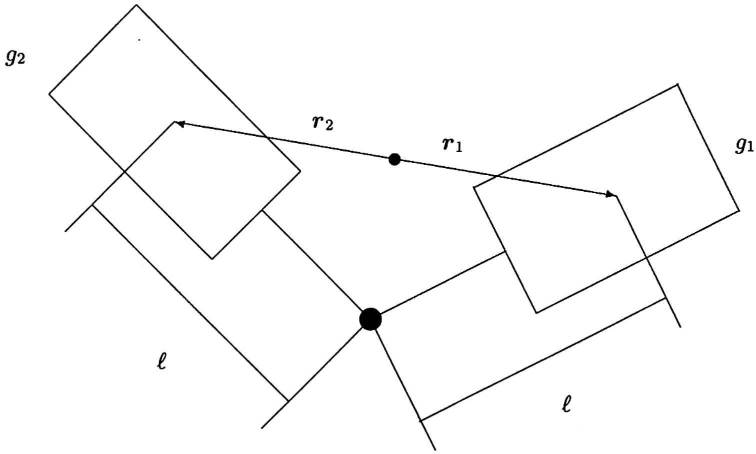


図 1　連結 2 円柱系

二つの同じ形の軸対称な円柱があって，それらが結合以外の何の拘束も与えないような特別な連結手で結合されているとする．この系の重心は固定されている（重心運動がない）と仮定する．ℓ を連結手と各円柱の重心との間の距離とする．すると，このモデルの配位空間 X は次のようになる．

$$X = \{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, g_1, g_2)\} \subset \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \times SO(3) \times SO(3) \tag{2.1}$$

ただし，g_1, g_2 は各円柱のそれ自身の重心のまわりの回転を表し，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ は各円柱の重心の，全体重心からみた位置ベクトルで，

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\ell}{2}(g_1\boldsymbol{e}_3 - g_2\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{r}_2 \tag{2.2}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{e}_a$, $a=1,2,3$, は標準的な $\boldsymbol{R}^3$ の基底ベクトルである．$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ がどちらも g_1, g_2 で表されているので，$X \cong SO(3)\times SO(3)$ が成り立つ．つまり，$(g_1,g_2)\in SO(3)\times SO(3)$ だけで X の点が指定され，逆も言える．

回転群 $SO(3)$ は，このモデルを全体重心のまわりに一斉に回転させるという仕方で，X の左から

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,g_1,g_2)\to(h\boldsymbol{r}_1,h\boldsymbol{r}_2,hg_1,hg_2),\quad h\in SO(3) \tag{2.3}$$

のように作用する．この作用を，$x\in X$ に対して，$x\mapsto hx$ のように表す．この作用は固定点なし（$hx=x \Rightarrow h=e$（単位元））であるので，X は底空間 $M:=X/SO(3)$ 上の $SO(3)$-バンドルとなる．このバンドルの射影を π とすると，以下のように実現される(付録 A 参照)．

$$\pi:\ X\cong SO(3)\times SO(3)\to M\cong SO(3),\quad \pi(g_1,g_2)=g_1^{-1}g_2 \tag{2.4}$$

M が形の空間（形状空間）で，バンドルの構造群 $SO(3)$ が回転の自由度を担う．形の空間も $SO(3)$ とみなせるので，ほとんどすべての形 $q\in M$ は

$$q=e^{-\theta_1\widehat{\boldsymbol{e}}_3}e^{\psi\widehat{\boldsymbol{e}}_1}e^{-\theta_2\widehat{\boldsymbol{e}}_3}\in U\subset SO(3) \tag{2.5}$$

のように表すことができる(付録 B 参照)．ただし，$\widehat{\boldsymbol{e}}_a=R(\boldsymbol{e}_a)$ は反対称行列で，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，$R(\boldsymbol{e}_a)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_a\times\boldsymbol{x}$ で定義される．一般に，$R:\boldsymbol{R}^3\to so(3)$ はベクトル空間の同形写像となる．ここに，$so(3)$ は $SO(3)$ のリー代数で，3×3 の実反対称行列全体からなる．また U は次のように指定される M の開集合である．

$$0<\psi<\pi,\quad 0<\theta_1<2\pi,\quad 0<\theta_2<2\pi \tag{2.6}$$

ここで局所断面 $\sigma : U \to \pi^{-1}(U)$ を次のように定義する．

$$\sigma(q) = (\boldsymbol{\sigma}_1(q), \boldsymbol{\sigma}_2(q), k_1(q), k_2(q)), \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_1(q) = \boldsymbol{e}_2 \ell \sin \dfrac{\psi}{2} \\ \boldsymbol{\sigma}_2(q) = -\boldsymbol{e}_2 \ell \sin \dfrac{\psi}{2} \\ k_1(q) = e^{-\frac{\psi}{2}\widehat{\boldsymbol{e}}_1} e^{\theta_1 \widehat{\boldsymbol{e}}_3} \\ k_2(q) = e^{\frac{\psi}{2}\widehat{\boldsymbol{e}}_1} e^{-\theta_2 \widehat{\boldsymbol{e}}_3} \end{cases} \tag{2.7}$$

これは，連結 2 円柱系の形を $q \in U$ で定めて，$\boldsymbol{R}^3$ の中にある姿勢 $\sigma(q)$ で置くことを意味し，具体的には図 2 にあるように実現される．

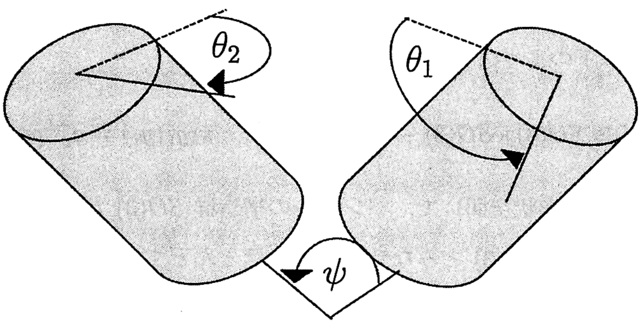


図 2　局所断面 $\sigma(q)$ の実現

たとえば，図 2 の向かって右側の円柱は，まず対称軸を $\boldsymbol{e}_3$ 軸に沿わせるように置いて，これを $\boldsymbol{e}_3$ 軸まわりに角度 θ_1 だけ回転させ，続いて，$\boldsymbol{e}_1$ 軸まわりに角度 $-\frac{\psi}{2}$ だけ回転させたものである．左側の円柱にも同様の手続きを施す($\theta_1, -\frac{\psi}{2}$ がそれぞれ $-\theta_2, \frac{\psi}{2}$ に置き換わる)．そして，2 円柱全体の重心が $\boldsymbol{R}^3$ の原点に来るように調整する．このようにして，実際に連結 2 円柱系が，角度 $(\psi, \theta_1, \theta_2)$ で決められる形をとって，$\boldsymbol{R}^3$ の中に置かれている．本稿

冒頭の絵で円柱は中空となっているが特に意味はないし，また図の中で，円柱に小さな棒がくっついているが，これは単に回転の目安につけているだけで，前足や後足をイメージしているが，質量はないものとする．

局所断面 σ が存在するので，$\pi^{-1}(U) \cong U \times SO(3)$ が成り立つ．すなわち，任意の $x \in \pi^{-1}(U) \subset X$ は以下の形に表される．

$$x = g\sigma(q) = (g\boldsymbol{\sigma}_1(q), g\boldsymbol{\sigma}_2(q), gk_1(q), gk_2(q)), \quad g \in SO(3) \tag{2.8}$$

つまり，任意に形 $(q \in U)$ を定めて，空中に置き $(\sigma(q))$，それを回転させる $(g\sigma(q))$ ことで，この連結 2 円柱系のほとんどすべての配位 $x \in \pi^{-1}(U)$ が実現できるということである．

以下では，配位空間 X 上で，慣性テンソル，全角運動量，接続形式，計量を定義する．それらは，次節でモデルの力学を記述するために利用される．まず，2 体ある軸対称円柱の質量，慣性テンソルを次のようにおく．

$$m := m_1 = m_2, \quad A_1 = A_2 = \mathrm{diag}(I_1, I_1, \nu I_1), \quad \nu = I_3/I_1, \quad m\ell^2 = \lambda I_1 \tag{2.9}$$

普通，慣性モーメントは I_1, I_2, I_3 のように表されるが，ここで $I_1 = I_2$ としているのは，円柱の対称軸が $\boldsymbol{e}_3$ 軸であるとき，それに直交する軸のまわりの慣性モーメントが等しいということを反映している．また，パラメータ ν, λ を上式で定義している．連結 2 円柱系の慣性テンソルは，$x \in X$ において写像 $A_x : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ として，以下のように定義される．

$$A_x(\boldsymbol{v}) := 2m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}) + \sum_{i=1}^{2} g_i A_i g_i^{-1} \boldsymbol{v} \tag{2.10}$$

ただし，$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^3$ である．右辺の第 1 項は，全体の重心に対する各円柱の重心の慣性テンソルの和を表し，第 2 項は各円柱のそれ自身の重心まわりの慣性テンソルの和を表す．A_i の代わりに $g_i A_i g_i^{-1}$ となってい

るのは，一般には各円柱の対称軸が $\boldsymbol{e}_3$ に対して傾いているためである．特に，$x=\sigma(q)$ において，(2.10) は

$$A_{\sigma(q)}(\boldsymbol{v}) := 2m\boldsymbol{\sigma}(q)\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\sigma}(q)) + \sum_{i=1}^{2} k_i(q)A_i k_i^{-1}(q)\boldsymbol{v} \tag{2.11}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}_1 = -\boldsymbol{\sigma}_2$ である．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_a, a=1,2,3,$ とおいて，具体的に (2.11) から $A_{\sigma(q)}$ の行列成分を計算して，以下の行列表示を得る．

$$A_{\sigma(q)} = 2I_1\begin{pmatrix} 1+\lambda\sin^2\frac{\psi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\psi}{2}+\nu\sin^2\frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\frac{\psi}{2}+\nu\cos^2\frac{\psi}{2}+\lambda\sin^2\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

一般の $x=g\sigma(q)$ に対して，慣性テンソルは次のように表される．

$$A_{g\sigma(q)} = gA_{\sigma(q)}g^{-1} \tag{2.13}$$

全角運動量 $\boldsymbol{\Lambda}_x$ は，$x\in X$ において微分形式の形で次のように定義される．

$$\boldsymbol{\Lambda}_x = 2m\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{2} g_i A_i R^{-1}(g_i^{-1}dg_i) \tag{2.14}$$

右辺の第 1 項は各円柱の重心の全体重心に対する角運動量の和，第 2 項は各円柱のそれ自身の重心に対する角運動量の和である．特に，$\sigma(q)\in X$ において，定義に従って計算すると

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma(q)} = \nu I_1\left(\sin\frac{\psi}{2}(d\theta_1+d\theta_2)\boldsymbol{e}_2 + \cos\frac{\psi}{2}(d\theta_1-d\theta_2)\boldsymbol{e}_3\right) \tag{2.15}$$

が得られる．一般には，$x=g\sigma(q)$ において，$\boldsymbol{\Lambda}_x$ は

$$\boldsymbol{\Lambda}_{g\sigma(q)} = gA_{\sigma(q)}(\boldsymbol{\Phi}) + g\boldsymbol{\Lambda}_{\sigma(q)} \tag{2.16}$$

の形をとることが計算によりわかる．ただし，$\boldsymbol{\Phi}$ は $\boldsymbol{R}^3$ に値をとる微分形式で，$R(\boldsymbol{\Phi}) = g^{-1}dg$ で定義される．

慣性テンソルと全角運動量とから，接続形式が $x \in X$ において次のように定義される(付録C参照).

$$\omega_x = R(A_x^{-1}(\mathbf{\Lambda}_x)) \tag{2.17}$$

特に，$x = \sigma(q) \in X$ において，$\omega_{\sigma(q)}$ は次のように展開される.

$$\begin{aligned}\omega_{\sigma(q)} = &\frac{\nu \sin\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}+\nu\sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{1}{2}(d\theta_1+d\theta_2)R(\boldsymbol{e}_2)\\ &+\frac{\nu\cos\frac{\psi}{2}}{\sin^2\frac{\psi}{2}+\nu\cos^2\frac{\psi}{2}+\lambda\sin^2\frac{\psi}{2}}\frac{1}{2}(d\theta_1-d\theta_2)R(\boldsymbol{e}_3)\end{aligned} \tag{2.18}$$

(2.13), (2.16) から計算でわかるように，一般には，$x = g\sigma(q)$ において接続形式は次のように表される.

$$\omega_{g\sigma(q)} = \mathrm{Ad}_g(g^{-1}dg + \omega_{\sigma(q)}) \tag{2.19}$$

ここに，Ad_g は，$g \in SO(3)$ と $\xi \in so(3)$ とに対して $\mathrm{Ad}_g\xi = g\xi g^{-1}$ で定義される随伴作用素 $\mathrm{Ad}_g : so(3) \to so(3)$ である．また，計算の途中で，$R : \boldsymbol{R}^3 \to so(3)$ が $R(g\boldsymbol{x}) = \mathrm{Ad}_g R(\boldsymbol{x})$ という性質をもつことも使った.

曲線 $x(t) \in X$ は $\omega_{x(t)}(\dot{x}(t)) = 0$ をみたすとき，平行移動すると言われる．ただし，$\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の接ベクトルを表す．したがって，接続形式の定義 $\omega_x = R(A_x^{-1}(\mathbf{\Lambda}_x))$ から，$x(t)$ が振動的であるための，すなわち，$x(t)$ の全角運動量がゼロ ($\mathbf{\Lambda}_{x(t)}(\frac{d}{dt}) = 0$) となるための必要十分条件は，$x(t)$ が平行移動することである．ただし，$\mathbf{\Lambda}_{x(t)}(\frac{d}{dt})$ は，定義式の中の外微分を，たとえば dg_i を $\dot{g}_i$ で置き換えることを意味する.

ここで，$R(\mathbf{\Phi}) = g^{-1}dg$ を座標を使って書き下すために，$g \in SO(3)$ を

$$g = e^{\chi_2\widehat{\boldsymbol{e}}_2}e^{\chi_3\widehat{\boldsymbol{e}}_3}e^{\chi_1\widehat{\boldsymbol{e}}_1}, \quad \widehat{\boldsymbol{e}}_a = R(\boldsymbol{e}_a) \tag{2.20}$$

のように表して，変数 χ_a, $a = 1, 2, 3$, を導入する．これらは通常のオイラー (Euler) 角とよく似ているが，若干異なる(付録B参照)．猫モデルの空中での

姿勢を表すのには，ここで導入した χ_a が便利なのである．χ_a の変域は以下のとおりである．

$$0 \leq \chi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \chi_2 \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \chi_3 \leq \pi/2 \tag{2.21}$$

この座標系 χ_a で左不変形式 $g^{-1}dg = \sum_{a=1}^{3} \Phi^a R(e_a)$ とそれに双対的な左不変ベクトル場 $(\Phi^a(K_b) = \delta_b^a)$ はそれぞれ以下のように表される(付録 D 参照)．

$$\begin{cases} \Phi^1 &= d\chi_1 + \sin\chi_3 d\chi_2 \\ \Phi^2 &= \cos\chi_3 \cos\chi_1 d\chi_2 + \sin\chi_1 d\chi_3 \\ \Phi^3 &= -\cos\chi_3 \sin\chi_1 d\chi_2 + \cos\chi_1 d\chi_3 \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} K_1 &= \dfrac{\partial}{\partial\chi_1} \\ K_2 &= \dfrac{\cos\chi_1}{\cos\chi_3}\dfrac{\partial}{\partial\chi_2} + \sin\chi_1\dfrac{\partial}{\partial\chi_3} - \tan\chi_3\cos\chi_1\dfrac{\partial}{\partial\chi_1} \\ K_3 &= -\dfrac{\sin\chi_1}{\cos\chi_3}\dfrac{\partial}{\partial\chi_2} + \cos\chi_1\dfrac{\partial}{\partial\chi_3} + \tan\chi_3\sin\chi_1\dfrac{\partial}{\partial\chi_1} \end{cases} \tag{2.23}$$

ここで新しい座標を

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \tag{2.24}$$

で導入し，M の局所座標を $(q^\alpha) = (\psi, \phi_1, \phi_2)$ そして $\pi^{-1}(U)$ の局所座標を (q^α, χ_a) とすると，接続形式の成分表示は，(2.19) により次のようになる．

$$\omega_{g\sigma(q)} = \sum_a \omega^a \mathrm{Ad}_g R(e_a), \qquad \begin{cases} \omega^1 = \Phi^1 \\ \omega^2 = \Phi^2 + \Gamma_2^2(q)d\phi_1 \\ \omega^3 = \Phi^3 + \Gamma_3^3(q)d\phi_2 \end{cases} \tag{2.25}$$

ここで Φ^a は (2.22) で与えられている左不変形式であり，$\Gamma_\alpha^a(q)$ は $\omega_{\sigma(q)}$ の成分で，(2.18) からわかるように，ゼロでない成分は以下のように書ける．

$$\Gamma_2^2(q) = \frac{\nu \sin\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2} + \nu\sin^2\frac{\psi}{2}}, \quad \Gamma_3^3(q) = \frac{\nu\cos\frac{\psi}{2}}{\sin^2\frac{\psi}{2} + \nu\cos^2\frac{\psi}{2} + \lambda\sin^2\frac{\psi}{2}} \tag{2.26}$$

配位空間 X の計量は，連結 2 円柱系の運動エネルギーに基づいて定義され，以下のように表される．((2.27) から (2.28) を導くための計算は直接的だが相当長い.)

$$ds^2 = 2m d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{2} \Theta_i \cdot A_i \Theta_i \tag{2.27}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta + \sum_{a,b=1}^{3} A_{ab}\omega^a\omega^b \tag{2.28}$$

ここで，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}_2$, $g_i^{-1}dg_i = R(\Theta_i)$, $g_i = gk_i$, $(q^\alpha) = (\psi, \phi_1, \phi_2)$, そして $(a_{\alpha\beta}), (A_{ab})$ は対角行列の形でそれぞれ以下のように与えられる．

$$(a_{\alpha\beta})$$
$$= 2I_1 \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{4}\big(1+\lambda\cos^2\frac{\psi}{2}\big), \frac{\nu\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos^2\frac{\psi}{2}+\nu\sin^2\frac{\psi}{2}}, \frac{(1+\lambda)\nu\sin^2\frac{\psi}{2}}{\sin^2\frac{\psi}{2}+\nu\cos^2\frac{\psi}{2}+\lambda\sin^2\frac{\psi}{2}}\Big), \tag{2.29a}$$

$$(A_{ab})$$
$$= 2I_1 \mathrm{diag}\Big(1+\lambda\sin^2\frac{\psi}{2}, \cos^2\frac{\psi}{2} + \nu\sin^2\frac{\psi}{2}, \sin^2\frac{\psi}{2} + \nu\cos^2\frac{\psi}{2} + \lambda\sin^2\frac{\psi}{2}\Big) \tag{2.29b}$$

A_{ab} は (2.12) で与えられた $A_{\sigma(q)}$ の成分である．(2.28) の右辺の第 1 項は形の空間 $M = X/SO(3)$ 上の計量 ds_M^2 を定める．

$$ds_M^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \tag{2.30}$$

このように $M = X/SO(3)$ 上の計量が定義できるのは，X の計量 ds^2 が $SO(3)$ の作用で不変だからである．実際，$\boldsymbol{r} \mapsto h\boldsymbol{r}$, $g_i \mapsto hg_i$ で表される $h \in SO(3)$ の作用で (2.27) は不変である．

3　モデルの力学

配位空間 X 上の計量 (2.28) に付随するラグランジアンは，接バンドル $T(X)$ 上の運動エネルギーとして，次のように表される．

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{3} A_{ab}\pi^{a}\pi^{b} \tag{3.1}$$

ただし，変数 $\boldsymbol{\pi} = \sum \pi^{a}\boldsymbol{e}_{a}$ は

$$R(\boldsymbol{\pi}) = g^{-1}\dot{g} + \sum_{a=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\Gamma_{\alpha}^{a}(q)\dot{q}^{\alpha}R(\boldsymbol{e}_{a}) \tag{3.2}$$

で定義されるのであるが，少し注釈がいる．配位空間 X の局所座標系は (q^{α}, χ_{a}) であるので，普通の一般化速度は $(\dot{q}^{\alpha}, \dot{\chi}_{a})$ と書かれるのだが，π^{a} はそれをさらに変数変換したものになっている．(2.22), (2.25) からわかるように，具体的に書くと次のようになる．

$$\pi^{1} = \dot{\chi}_{1} + \sin\dot{\chi}_{2} \tag{3.3a}$$

$$\pi^{2} = \cos\chi_{3}\cos\chi_{1}\dot{\chi}_{2} + \sin\chi_{1}\dot{\chi}_{3} + \Gamma_{2}^{2}(q)\dot{q}^{1} \tag{3.3b}$$

$$\pi^{3} = -\cos\chi_{3}\sin\chi_{1}\dot{\chi}_{2} + \cos\chi_{1}\dot{\chi}_{3} + \Gamma_{3}^{3}(q)\dot{q}^{3} \tag{3.3c}$$

これは，接続形式 ω の成分 ω^{a} の中の $d\chi_{a}, dq^{\alpha}$ を $\dot{\chi}_{a}, \dot{q}^{\alpha}$ で置き換えたものである．すなわち，$\pi^{a} = \omega^{a}(\frac{d}{dt})$ である．π^{a} を採用することにより，接バンドル $T(X)$ の局所座標系として，$(q^{\alpha}, \chi_{a}, \dot{q}^{\alpha}, \pi^{a})$ を採用していることになる．そして，L は χ_{a} に依存しないのが特徴である．

連結 2 円柱系に次のようなトルクを掛ける．

$$\sum_{\alpha} v_{\alpha}(t)dq^{\alpha} \tag{3.4}$$

このとき，オイラー - ラグランジュ方程式を書くと次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\gamma}_\alpha) = v_\alpha, \tag{3.5a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} \times \boldsymbol{\pi} + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} \times \boldsymbol{\gamma}_\alpha \dot{q}^\alpha = 0 \tag{3.5b}$$

ここで，$\boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} = \sum_c \kappa^c_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_c$ は接続形式 ω に対する曲率テンソルで，以下の式で定義される．

$$\kappa^c_{\alpha\beta} := \frac{\partial \Gamma^c_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^c_\alpha}{\partial q^\beta} - \sum_{a,b} \varepsilon_{abc}\Gamma^a_\alpha \Gamma^b_\beta \tag{3.6}$$

また，$\boldsymbol{\gamma}_\alpha$ は $\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \sum_\alpha \Gamma^a_\alpha \boldsymbol{e}_a$ で定義されるベクトルである．方程式 (3.5) は普通見かけるものとは形が異なっているが，変数 $\boldsymbol{\pi}$ を導入したのでこの形になったのである(付録 E 参照)．

前述のように，全角運動量がゼロの条件と平行移動の条件 $\omega_{x(t)}(\dot{x}(t)) = 0$ とは同値であるから，全角運動量ゼロの拘束条件を $\boldsymbol{\pi} = 0$ ($\Leftrightarrow$ $\omega^a(\frac{d}{dt}) = 0$) と表すことができる．また，オイラー - ラグランジュ方程式 (3.5) から明らかなように，$\boldsymbol{\pi} = 0$ はこの方程式と両立する．実は，トルク入力があっても全角運動量は保存する．実際，(2.16) からわかるように，$T(X)$ 上のベクトル値関数としての全角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Lambda}_{g\sigma(q)}\left(\frac{d}{dt}\right) = gA_{\sigma(q)}(\boldsymbol{\pi}) \tag{3.7}$$

であり，(3.5b) は $\boldsymbol{L}$ が保存するという条件 $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$ と同値である．

こうして，全角運動量ゼロの拘束のもとで，運動方程式 (3.5) は次のものに帰着する．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_c}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L_c}{\partial q^\alpha} = v_\alpha, \quad L_c := L|_{\boldsymbol{\pi}=0} \tag{3.8}$$

$T(X)$ 上の運動方程式が $T(M)$ 上の運動方程式に簡約化されたのである．

制御入力 $v_\alpha(t)$ を適当に選べば，理論上は上の方程式の解から M 上の曲線 $q(t)$ が得られる．この $q(t)$ を使って，拘束条件の方程式 $\boldsymbol{\pi}=0$, すなわち

$$\frac{dg}{dt} = -g\Big(\Gamma_2^2(q)\frac{d\phi_1}{dt}R(e_2)+\Gamma_3^3(q)\frac{d\phi_2}{dt}R(e_3)\Big) \tag{3.9}$$

を解かなくてはならない．この方程式は (3.3) において，$\pi^a=0$ としたものと同値である．これは g に対する線形方程式で，初期値をたとえば，$g(0)=I$ とすれば，解 $g(t)\in SO(3)$ が得られる．最後に，配位空間 X 内の振動運動は $x(t)=g(t)\sigma(q(t))$ の形に表されることになる．これが宙返りのひとつの実現である．

簡約化ラグランジュ力学系 $(T(M),L_c)$ をハミルトン力学系 $(T^*(M),H_c)$ に移し替えることができる．$T^*(M)$ 上の標準的な 1 次微分形式 Θ_0 と L_c に付随するハミルトニアン H_c はそれぞれ次のように与えられる．

$$\Theta_0 = \sum_\alpha P_\alpha dq^\alpha, \quad P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}, \tag{3.10}$$

$$H_c = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta, \quad (a^{\alpha\beta}) = (a_{\alpha\beta})^{-1} \tag{3.11}$$

ハミルトンベクトル場 X_{H_c} はいつものように $\iota(X_{H_c})d\Theta_0=-dH_c$ で決められる．

4 モデルの制御

$T(M)$ 上の制御系 (3.8) を $T^*(M)$ 上の制御系に書き換えると次のようになる．

$$\frac{dp}{dt} = X_{H_c}+\sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha X_\alpha, \quad X_\alpha = \frac{\partial}{\partial P_\alpha}, \tag{4.1a}$$

$$y_\alpha = X_\alpha(H_c) \tag{4.1b}$$

ただし $p \in T^*(M)$ で，そして y_α はシステム出力と呼ばれる．この形の制御系をポート制御ハミルトン系という．ここで，X_α は制御のためのベクトル場である．$X_\alpha = \partial/\partial P_\alpha$ の形をしているのは，入力 $v_\alpha X_\alpha$ が一般化運動量を変化させるトルクであることを意味する．

ポートハミルトン制御のキーとなる考え方は，エネルギー整形である．運動エネルギーだけからなるハミルトニアン H_c に，ある点 $q_e \in M$ で最小値ゼロをとるような正値関数 $V(q)$ をポテンシャルエネルギーとして付け加えて，新しいハミルトニアン

$$\overline{H} = H_c + V(q), \quad V(q) \geq 0 \tag{4.2}$$

を導入すると，新しいポート制御ハミルトン系は次の形に書ける．

$$\frac{dp}{dt} = X_{\overline{H}} + \sum_{\alpha=1}^{3} \overline{v}_\alpha X_\alpha, \tag{4.3a}$$

$$\overline{y}_\alpha = X_\alpha(\overline{H}) \tag{4.3b}$$

新旧のポート制御ハミルトン系が同値であるための必要十分条件は以下のように書ける．

$$X_U + \sum(\overline{v}_\alpha - v_\alpha) X_\alpha = 0, \tag{4.4a}$$

$$\overline{y}_\alpha - y_\alpha = X_\alpha(V) \tag{4.4b}$$

新ポート制御ハミルトン系において，制御入力 $\overline{v}_\alpha$ を

$$\overline{v}_\alpha = -\overline{y}_\alpha \tag{4.5}$$

のように選ぶと，新しい系はリャプーノフ安定となる．実際，$\overline{H}$ を時間微分すると，

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = X_{\overline{H}}(\overline{H}) + \sum_{\alpha=1}^{3} \overline{v}_\alpha X_\alpha(\overline{H}) = -\sum_{\alpha=1}^{3} X_\alpha(\overline{H})^2 \leq 0 \tag{4.6}$$

が得られる．この結果，新ハミルトニアンのもとで，$(q,P)=(q_e,0)$ は平衡点となる．すなわち，連結2円柱系は $t\to\infty$ のとき，$(q_e,0)$ に漸近する．つまり，ある形 q_e に近づいて静止する．このように新制御入力 $\overline{v}_\alpha$ を定めると，(4.4) と (4.5) とから，旧制御入力 v_α も次のように決まる．

$$v_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H_c}{\partial P_\alpha} \tag{4.7}$$

念のために再度注意しておくが，制御系の方程式は，制御入力があるので，決してハミルトン力学にいうハミルトン方程式ではない．実際，入力決定後の方程式 (4.1a) は座標表示で次のようになっている．

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial P_\alpha}(H_c+V), \tag{4.8a}$$

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q^\alpha}(H_c+V) - \frac{\partial H_c}{\partial P_\alpha} \tag{4.8b}$$

したがって，$\overline{H}=H_c+V$ が保存量ではなく，リャプーノフ関数となることに何の矛盾もない．

5 実 演

ここではポテンシャル関数を次の形に選ぶ．

$$V = k_1\sin^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) + k_2\sin^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right) + k_3\sin^2\left(\psi-\frac{4\pi}{5}\right) \tag{5.1}$$

ただし，k_α は正の定数である．このポテンシャル関数は $q_e=e^{\frac{4\pi}{5}\hat{e}_1}$ においてて最小値ゼロをとる．この q_e が振動運動の後に最終的に連結2円柱系がとる形である．ここで，数値計算のためパラメータを次のように選ぶ．

$$I_1=\frac{19}{12}, \quad \nu=\frac{6}{19}, \quad \lambda=\frac{48}{19}, \quad k_1=k_2=k_3=1 \tag{5.2}$$

すでに制御入力の取り方も決まっているので，制御系の方程式 (4.8) を理論的には解くことができる．そして，解 $(q(t), P(t))$ が得られたなら，拘束条件の方程式 (3.9) を $q(t)$ に沿って解いて $g(t)$ が得られる．すると，$t \to \infty$ のとき $g(t) \to g_e$ となるような g_e が決まる．そして，$x_e = g_e\sigma(q_e)$ が配位空間における最終的な目標点となる．つまり，連結 2 円柱系は q_e で指定される形と，g_e で指定される姿勢をとって静止する．静止したときに実際に望みの宙返りを実現しているだろうかという疑問が残る．そこで次のように考えて，初期条件をうまく設定する．

いま，初期値 $q_0 = q(0)$ を固定し，初期運動量 $K = (P_\alpha(0))$ をパラメータにとれば，(4.8) の解の族 $q(t, K)$ が得られるだろう．十分長い時間 T をとって，実質的に K にかかわらずに $q(T, K) \approx q_e$ となるような T を一つ定める．すなわち，

$$\phi_1(T, K) \approx -2\pi, \quad \phi_2(T, K) \approx 0, \quad \psi(T, K) \approx \frac{4\pi}{5} \tag{5.3}$$

このとき，$\theta_1(T, K) = \theta_2(T, K) \approx -2\pi$ である．$g(t, K)$, $0 \le t \le T$, で拘束条件方程式 (3.9) に対する解の族を表す．振動運動 $g(t, K)\sigma(q(t, K))$, $0 \le t \le T$, の後で次のような回転を得ることが目標である．

$$g(0, K) = I \longmapsto g(T, K) = e^{\pi\widehat{e}_2} \tag{5.4a}$$

$$\chi_1(T, K) = 0, \quad \chi_2(T, K) = \pi, \quad \chi_3(T, K) = 0 \tag{5.4b}$$

ただし，(5.4) を要請するのは，$\boldsymbol{e}_2$ 軸のまわりに角度 π の回転を実現させるためである．これは，仰向きに空中に置かれた猫が振動運動の後にうつむきに着地するということに相当する．さて，目標の回転を得るためには，方程式

$$g(T, K) = e^{\pi\widehat{e}_2} \tag{5.5}$$

を K について解かねばならないが，これは，たとえばニュートン法で数値的に解くことができる．このようにして見出された K に対して，$q^\alpha(t)$, $\chi_a(t)$

が数値的に決まり，形 $q(t) = e^{-(\phi_1(t)+\phi_2(t))\widehat{e}_3} e^{\psi(t)\widehat{e}_1} e^{-(\phi_1(t)-\phi_2(t))\widehat{e}_3}$ と姿勢 $g(t) = e^{\chi_2(t)\widehat{e}_2} e^{\chi_3(t)\widehat{e}_3} e^{\chi_1(t)\widehat{e}_1}$ とが定まる．$q^\alpha(t)$, $\chi_a(t)$ のグラフの例を付録 F に示しておいた．

6　おわりに

制御則が得られたので，いろいろと試してみることができる．経験的に知っていることであるが，猫は体が柔らかい．だから体をひねって宙返りができるのである，というのは合理的な説であろう．そのような説をこのモデルで確かめることができる．ポテンシャル関数にパラメータ k_1, k_2, k_3 が含まれていた．θ_1, θ_2 は体のねじりにかかわる量であるから，ポテンシャル関数の定義 (5.1) からわかるように，k_1, k_2 が大きいということは，体がねじりに対して硬いということを意味する．したがって，k_1, k_2 の大きいものと小さいものとを比較して，宙返りによって獲得する回転角に差が出ることが予想できる．実際やってみると予想通りの結果となる．k_1, k_2 が大きすぎると $g(T, K) = e^{\pi\widehat{e}_2}$ をみたすような適当な K が見当たらないのである．つまり，適当な時間内に $e^{\pi\widehat{e}_2}$ が実現できないのである．こうして，猫には宙返りができても，豚には無理であるということが納得できるのである．

連結 2 円柱系で猫の宙返りをモデル化しようとしたたぶん最初の論文は [1] である．そこでは簡単のためにねじりなしの条件 $\phi_2 = 0$ $(\theta_1 = \theta_2)$ がつけられていたし，運動方程式の取り扱いはなかった．次に，[2] では [1] のモデルを数学的に，最適制御の考え方で取り扱った．しかし，制御入力はトルクではなかった．本稿では，力学的な観点から制御入力はトルクであるべきと考えて制御系を定式化し，ポートハミルトン制御の手法で制御則を与えた．制御則を決める上で参考にしたのは [3] である．制御分野の論文ではポート制

御ハミルトン系の相空間を $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ としているが，これを接バンドル上の理論に書き換えるのは簡単であるので，そのようにして利用した．

最後に第 1 節で触れた分子の量子力学と古典力学について，関連の文献を紹介しておく．筆者がこの分野の研究を始めて最初に書いた論文が [4] である．その後いくつか書いたが，量子力学に関しては [5, 6] を，古典力学については [7, 8] を挙げておくにとどめる．

参考文献

[1] T.R. Kane and M.P. Scher : A dynamical explanation of the falling cat phenomena, *Int. J. Solid Structure* **5** (1969), 663–670.

[2] R. Montgomery : Gauge theory of the falling cat, in *Dynamics and Control of Mechanical Systems*, M.J. Enos ed., Amer. Math. Soc. (1993), 193–218.

[3] K. Fujimoto and T. Sugie : Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems, *Sys. Cont. Lett.* **42** (2001), 217–227.

[4] A. Tachibana and T. Iwai : Complete molecular Hamiltonian based on the Born-Oppenheimer adiabatic approximation, *Physical Review* **33**A (1986), 2262–2269.

[5] T. Iwai and S. Tanimura : Reduction of quantum systems on Riemannian manifolds with symmetry and application to molecular mechanics, *Journal of Mathematical Physics* **41** (2000), 1814–1842.

[6] T. Iwai and H. Yamaoka : Rotational-vibrational energy spectra of tri-atomic molecules near relative equilibria, *Journal of Methematical Physics* **49** (2008), 043505(22pp).

[7] T. Iwai : A geometric setting for classical molecular dynamics, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **47** (1987), 199–219.

[8] T. Iwai and H. Yamaoka : Stratified reduction of classical many-body systems with symmetry, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **38** (2005), 2415–2439.

[9] 小林昭七：接続の微分幾何学とゲージ理論，裳華房，1989.

[10] E.T. Whittaker : *A treatise on the Analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge Univ. Press, London, 1959.

A　主ファイバーバンドル

[9] によれば，主ファイバーバンドルの定義は次のようになる．ただし，同書では群の作用を「右から」としているが，本稿では，群の作用を「左から」としているので，それに合わせて定義を書き換えることにする．P, M は多様体で，G はリー群とする．P が G を構造群とする M 上の主ファイバーバンドル（あるいは，G-バンドル）であるとは，以下の性質をもつことである．

(i) 微分可能写像 $\pi : P \to M$ が与えられていて，

$$\pi(P) = M \tag{A.1}$$

(ii) 群 G が P に左から作用している．すなわち，微分可能な写像

$$G \times P \longrightarrow P, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p \tag{A.2}$$

が与えられていて，

$$(gh)p = g(hp), \quad g, h \in G,\ p \in P \tag{A.3a}$$

$$e \cdot p = p \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元}) \tag{A.3b}$$

さらに，この G の作用は以下の条件をみたす．

$$\pi(gp) = \pi(p) \tag{A.4a}$$

$\pi(p) = \pi(p')$ ならば，$p' = gp$ をみたす $g \in G$ が唯一つ存在する．　(A.4b)

(iii) M に開被覆 $\{U_\alpha\}$ があり，各 U_α 上に切断 $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ が存在する．ただし，切断の定義は，任意の $q \in U_\alpha$ に対し $\pi(\sigma_\alpha(q)) = q$ の成り立つことを要請する．

本稿のモデルでは，$P = X$, $G = SO(3)$, $M = X/SO(3)$ となっている．X が $SO(3)$-バンドルであることを確認しよう．まず，(A.1), (A.2), (A.3) は明らかに成り立っている．また，(2.4) のように π を定義すると，たしかに，(A.4) も成り立つ．実際，$X \cong SO(3) \times SO(3)$ であるから，$x \in X$ の代わりに $(g_1, g_2) \in SO(3) \times SO(3)$ を使ってもよいので，$\pi(hg_1, hg_2) = (hg_1)^{-1}hg_2 = g_1^{-1}g_2 = \pi(g_1, g_2)$ がいえる．(これが，回転で移り合うものは同じ形をもつということの数学的記述である.) また，$\pi(g_1, g_2) = \pi(h_1, h_2)$ ならば，$g_1^{-1}g_2 = h_1^{-1}h_2$ が，したがって，$h_1 g_1^{-1} = h_2 g_2^{-1}$ が成り立つので，$k = h_1 g_1^{-1} = h_2 g_2^{-1}$ とおけば，$(h_1, h_2) = (kg_1, kg_2)$ を得る．最後に，(iii) について述べる．本文中で「ほとんどすべての形 $q \in M$ は (2.5) のように表すことができる」と書いたが，バンドルの定義からは，M の開被覆を与えねばならないのだが，一つの開集合 (2.6) しか示していないのは，しかし，それで M のほぼすべてが被われているという理由からである．また，(2.7) にあるように本稿のモデルでは，具体的に局所断面を実現することができる．つまり，連結 2 円柱系の形を決めて，空間内に据えるという作業である．もちろん，M を開集合 U_α で覆って，断面 $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ を作ることは可能である．

B　オイラー角

$SO(3)$ の局所座標であるオイラー角の定義が一通りではないことに注意が必要である．(2.5) ではオイラー角を e_1, e_3 軸まわりの回転で与えているが，(2.20) では e_a, $a = 1, 2, 3$, 軸まわりの回転を使って与えている．任意の回転

は，適当な 2 軸を選んでそのまわりの回転で生成できるというのが大事な点であるが，もちろん，3 軸まわりの回転を用いてもかまわないし，2 軸の選び方も一通りではない．

2 軸を e_1, e_3 に選ぶと，オイラー角の取り方は次のようになる．任意の $g \in SO(3)$ に対し，ベクトル ge_3 を考える．これを e_3 軸まわりの回転 h_3 で e_2-e_3 平面に運び，次にそれを e_1 軸まわりの回転 h_1 で e_3 に重ねると，$h_1 h_3 g e_3 = e_3$ が得られる．したがって，$h_1 h_3 g$ は e_3 軸まわりの回転となる．この回転を k_3 で表すと，$h_1 h_3 g = k_3$ となり，g は $g = h_3^{-1} h_1^{-1} k_3$ の形に表される．適当に角度の記号を選ぶと，$g = e^{\phi \widehat{e}_3} e^{\theta \widehat{e}_1} e^{\psi \widehat{e}_3}$ が得られる．ただし，(2.5) とは記号の取り方が異なる．同じ考え方で，2 軸を e_2, e_3 に選んで，オイラー角を定義することもできる．そのとき，$g \in SO(3)$ は $g = e^{\phi \widehat{e}_3} e^{\theta \widehat{e}_2} e^{\psi \widehat{e}_3}$ の形に表される．

3 軸全部を使って回転を表すには，たとえば次のようにすればよい．任意の $g \in SO(3)$ に対し，ge_1 を考える．このベクトルを e_2 軸まわりの回転 h_2 で e_1-e_2 平面に運んで，次にそれを e_3 軸まわりの回転 h_3 で e_1 に重ねると，$h_3 h_2 g e_1 = e_1$ が得られる．したがって，$h_3 h_2 g$ は e_1 軸まわりの回転となる．この回転を k_1 で表すと，$h_3 h_2 g = k_1$ が得られる．これより，$g = h_2^{-1} h_3^{-1} k_1$ が得られて，三つの角度を χ_a, $a = 1, 2, 3$, と書いて，$g = e^{\chi_2 \widehat{e}_2} e^{\chi_3 \widehat{e}_3} e^{\chi_1 \widehat{e}_1}$ という表示を得る．これが (2.20) である．

C　接続形式

(2.17) では，接続形式を $\omega_x = R(A_x^{-1} \Lambda_x)$ と定義したが，これがたしかに接続形式であるというためには，確認しておくべきことがある．すなわち，

$$\text{(i)}\ \omega_x(\xi_X(x)) = \xi, \quad \xi \in so(3), \quad \text{(ii)}\ \omega_{hx} = \mathrm{Ad}_h \omega_x, \quad h \in SO(3) \qquad \text{(C.1)}$$

が成り立つことを確認しなければならない．ただし，$\xi_X(x)$ は主バンドル X 上で

$$\left.\frac{d}{dt}e^{t\xi}x\right|_{t=0} = \xi_X(x) \tag{C.2}$$

により定義される基本ベクトル場である．[9] では主バンドルへの構造群の作用が右作用であるのに対し，本稿ではそれが左作用となっているので，接続形式のみたすべき性質 (C.1) の表記が同書とは異なっている．

(C.1) を証明する．$\mathbf{\Lambda}_{hx} = h\mathbf{\Lambda}_x$, $A_{hx} = hA_xh^{-1}$ から

$$\omega_{hx} = R(A_{hx}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{hx}) = \mathrm{Ad}_h R(A_x^{-1}\mathbf{\Lambda}_x) = \mathrm{Ad}_h\omega_x \tag{C.3}$$

が得られるので (ii) が示された．(i) を示すには $\xi_X(x)$ を知らなければならない．1パラメータ群 $e^{t\xi} \in SO(3)$ の作用は，$\boldsymbol{r} \mapsto e^{t\xi}\boldsymbol{r}$, $g_i \mapsto e^{t\xi}g_i$ で表されるので，$\xi_X(x)$ の成分は $\xi\boldsymbol{r}$, ξg_i となる．ここで，$\xi = R(\boldsymbol{\theta})$ でベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を導入すると，$\mathbf{\Lambda}_x(\xi_X(x))$ は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_x(\xi_X(x)) &= 2m\boldsymbol{r} \times R(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{r} + \sum_i g_iA_iR^{-1}(g_i^{-1}\xi g_i) \\ &= 2m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}) + \sum_i g_iA_ig_i^{-1}\boldsymbol{\theta} \\ &= A_x(\boldsymbol{\theta})\end{aligned} \tag{C.4}$$

したがって，

$$\omega_x(\xi_X(x)) = R(A_x^{-1}\mathbf{\Lambda}_x(\xi_X(x))) = R(\boldsymbol{\theta}) = \xi \tag{C.5}$$

これで (i) が証明できた．こうして，(C.1) が確認できた．

D　左不変形式・右不変形式

一般に，剛体の力学は $SO(3)$ 上の力学系とみることができる．この文脈で，剛体の力学と $SO(3)$ 上の幾何学とは関連が深い．$SO(3)$ 上の $so(3)$-値微分形式

$$g^{-1}dg, \quad dgg^{-1} \tag{D.1}$$

をそれぞれ，左不変形式，右不変形式という．(その行列成分である微分形式を左不変形式，右不変形式というのが本来の用語である.)　実際，それぞれ，左移動 $g \mapsto hg$ と右移動 $g \mapsto gh$ で不変である ($(hg)^{-1}d(hg) = g^{-1}dg$, $d(gh)(gh)^{-1} = dgg^{-1}$)．これに付随して，

$$R(\boldsymbol{\Omega}) = g^{-1}\dot{g} = g^{-1}dg\left(\frac{d}{dt}\right), \quad R(\boldsymbol{W}) = \dot{g}g^{-1} = dg\left(\frac{d}{dt}\right)g^{-1} \tag{D.2}$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{W}$ をそれぞれ剛体に固定した座標軸に関する角速度，空間に固定した座標軸に関する角速度という．ところで，

$$R(g\boldsymbol{\Omega}) = gR(\boldsymbol{\Omega})g^{-1} = gg^{-1}\dot{g}g^{-1} = R(\boldsymbol{W}) \tag{D.3}$$

であるから，$\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{W}$ は

$$g\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{W} \tag{D.4}$$

で関係づけられている．

さて，(2.22) を計算で求めるには次のようにすればよい．(2.20) を利用し，$R(hx) = \mathrm{Ad}_h R(x)$ を使いながら $g^{-1}dg$ を計算すると，次のように (2.22) の表示が見出される．

$$
\begin{aligned}
g^{-1}dg &= d\chi_2 e^{-\chi_1\widehat{e}_1} e^{-\chi_3\widehat{e}_3} R(\boldsymbol{e}_2) e^{\chi_3\widehat{e}_3} e^{\chi_1\widehat{e}_1} \\
&\quad + d\chi_3 e^{-\chi_1\widehat{e}_1} R(\boldsymbol{e}_3) e^{\chi_1\widehat{e}_1} + d\chi_1 R(\boldsymbol{e}_1) \\
&= d\chi_2 e^{-\chi_1\widehat{e}_1} R(e^{-\chi_3\widehat{e}_3}\boldsymbol{e}_2) e^{\chi_1\widehat{e}_1} + d\chi_3 R(e^{-\chi_1\widehat{e}_1}\boldsymbol{e}_3) + d\chi_1 R(\boldsymbol{e}_1) \\
&= d\chi_2 e^{-\chi_1\widehat{e}_1} R(\boldsymbol{e}_1 \sin\chi_3 + \boldsymbol{e}_2\cos\chi_3) e^{\chi_1\widehat{e}_1} \\
&\quad + d\chi_3 R(\boldsymbol{e}_2\sin\chi_1 + \boldsymbol{e}_3\cos\chi_1) + d\chi_1 R(\boldsymbol{e}_1) \\
&= \cdots \\
&= R(\boldsymbol{e}_1)(d\chi_1 + \sin\chi_3 d\chi_2) \\
&\quad + R(\boldsymbol{e}_2)(\cos\chi_3\cos\chi_1 d\chi_2 + \sin\chi_1 d\chi_3) \\
&\quad + R(\boldsymbol{e}_3)(-\cos\chi_3\sin\chi_1 d\chi_2 + \cos\chi_1 d\chi_3)
\end{aligned} \tag{D.5}
$$

(2.23) の左不変ベクトル場 K_a は，$\Phi^a(K_b) = \delta^a_b$ に注意して，(2.22) の係数行列の逆行列を計算すれば見出せる．また，少し計算すれば，左不変ベクトル場は

$$
K_a = \left.\frac{d}{dt} g e^{t\widehat{e}_a}\right|_{t=0}, \quad a = 1,2,3 \tag{D.6}
$$

で与えられることがわかる．

E　オイラー - ラグランジュ方程式

オイラー - ラグランジュ方程式 (3.5) は普通の解析力学の教科書に書いてあるのとだいぶ異なる形をしている．しかしこれもオイラー - ラグランジュ方程式であることを具体的に示しておく．

θ^λ と X_λ は $\boldsymbol{R}^n$ における開集合 W における 1 次微分形式とベクトル場の基底とし，それぞれ座標系 (x^λ) により次のように表されているとする（x^λ はデカルト座標とは限らない）．

$$\theta^\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^\lambda dx^\mu, \quad X_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} B_\lambda^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{E.1}$$

ただし，

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^\lambda B_\nu^\mu = \delta_\nu^\lambda, \quad \sum_{\lambda=1}^{n} A_\mu^\lambda B_\lambda^\kappa = \delta_\mu^\kappa \tag{E.2}$$

計算により，θ^λ の外微分は次のように書ける．

$$\begin{aligned} d\theta^\lambda &= \sum_\kappa \frac{\partial A_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa} dx^\kappa \wedge dx^\mu \\ &= \sum_{\nu<\rho} \sum_{\kappa,\mu} \left(\frac{\partial A_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial A_\kappa^\lambda}{\partial x^\mu} \right) B_\nu^\kappa B_\rho^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\rho \end{aligned} \tag{E.3}$$

これを次のように表す．

$$d\theta^\lambda = \sum_{\nu<\rho} \gamma_{\rho\nu}^\lambda \theta^\nu \wedge \theta^\rho \tag{E.4}$$

ここで，$\gamma_{\rho\nu}^\lambda$ はハメル (Hamel) 記号と呼ばれていて，次式で定義される．

$$\gamma_{\rho\nu}^\lambda = \sum_{\kappa,\mu} B_\rho^\mu B_\nu^\kappa \left(\frac{\partial A_\mu^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial A_\kappa^\lambda}{\partial x^\mu} \right) \tag{E.5}$$

これだけ準備しておいて，普通のオイラー - ラグランジュ方程式をハメル記号を使って書き換える．いま $(x^\lambda, \dot{x}^\lambda)$ が接バンドル $T(W)$ の局所座標系だとして，変数 π^λ を

$$\pi^\lambda = \sum_\mu A_\mu^\lambda \dot{x}^\mu \tag{E.6}$$

で導入する．そして，(x^λ, π^μ) を $T(W)$ の局所座標系と考え，ラグランジアンが

$$L^*(x, \pi) = L(x, \dot{x}) \tag{E.7}$$

であるとする．ただし，$x = (x^\lambda)$，$\pi = (\pi^\lambda)$ 等の略号を用いた．$(x, \dot{x})$ を用いて書き表された通常のオイラー - ラグランジュ方程式を，(x, π) を用いて

書き直す．計算を実行すると，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^\lambda}\\&=\sum_{\kappa,\mu}\frac{\partial A^\mu_\lambda}{\partial x^\kappa}\dot{x}^\kappa\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}+\sum_\mu A^\mu_\lambda\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}-\frac{\partial L^*}{\partial x^\lambda}-\sum_{\mu,\kappa}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}\frac{\partial A^\mu_\kappa}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\kappa=0\end{aligned} \tag{E.8}$$

が得られる．上式に B^λ_ν を掛けて λ について和をとると次式が得られる．

$$\sum_{\lambda,\kappa,\mu}B^\lambda_\nu\frac{\partial A^\mu_\lambda}{\partial x^\kappa}\dot{x}^\kappa\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\nu}-\sum_\lambda B^\lambda_\nu\frac{\partial L^*}{\partial x^\lambda}-\sum_{\kappa,\mu,\lambda}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}\frac{\partial A^\mu_\kappa}{\partial x^\lambda}B^\lambda_\nu\dot{x}^\kappa=0 \tag{E.9}$$

$\dot{x}^\kappa=\sum B^\kappa_\rho\pi^\rho$ を用いてさらに整理すると，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\nu}-\sum_\lambda B^\lambda_\nu\frac{\partial L^*}{\partial x^\lambda}+\sum_{\mu,\rho}\sum_{\lambda,\kappa}B^\lambda_\nu B^\kappa_\rho\left(\frac{\partial A^\mu_\lambda}{\partial x^\kappa}-\frac{\partial A^\mu_\kappa}{\partial x^\lambda}\right)\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}\pi^\rho=0 \tag{E.10}$$

が得られる．これを，ハメル記号を用いて書き換えると次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\nu}-X_\nu(L^*)+\sum_{\mu,\rho}\gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}\pi^\rho=0 \tag{E.11}$$

この形のオイラー - ラグランジュ方程式は擬座標表示の方程式として知られているのだが [10]，普通の解析力学の本にはあまり見かけない．ここでは，擬座標という実体の裏付けのない用語は使わずに，ベクトル場の記号を使った．さて，(E.11) を我々のケースに適用したい．まず，必要な 1 次微分形式の局所基底 (θ^λ) は

$$\omega^a=\Phi^a+\sum\Gamma^a_\alpha dq^\alpha,\quad dq^\alpha \tag{E.12}$$

である．右辺の中の左不変形式 Φ^a が次の構造方程式をみたすことは計算によりわかる．

$$d\Phi^c=-\frac{1}{2}\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\Phi^a\wedge\Phi^b \tag{E.13}$$

(E.12) の微分形式に双対的なベクトル場 (X_λ) は

$$K_a,\quad \partial^*_\alpha:=\frac{\partial}{\partial q^\alpha}-\sum_a\Gamma^a_\alpha K_a \tag{E.14}$$

である．次に，ω^c の外微分を計算する．

$$
\begin{aligned}
&d\omega^c \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\Phi^a\wedge\Phi^b+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\Gamma^c_\alpha}{\partial q^\beta}dq^\beta\wedge dq^\alpha \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\left(\omega^a-\sum_\alpha\Gamma^a_\alpha dq^\alpha\right)\wedge\left(\omega^b-\sum_\beta\Gamma^b_\beta dq^\beta\right)+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\Gamma^c_\beta}{\partial q^\alpha}dq^\alpha\wedge dq^\beta \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\omega^a\wedge\omega^b+\sum_{a,b}\sum_\alpha\varepsilon_{abc}\Gamma^b_\alpha\omega^a\wedge dq^\alpha \\
&\quad +\sum_{\alpha<\beta}\left(\frac{\partial\Gamma^c_\beta}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial\Gamma^c_\alpha}{\partial q^\beta}-\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\Gamma^a_\alpha\Gamma^b_\beta\right)dq^\alpha\wedge dq^\beta
\end{aligned}
\tag{E.15}
$$

ここで，$\kappa^c_{\alpha\beta}$ を

$$
\kappa^c_{\alpha\beta} := \frac{\partial\Gamma^c_\beta}{\partial q^\alpha}-\frac{\partial\Gamma^c_\alpha}{\partial q^\beta}-\sum_{a,b}\varepsilon_{abc}\Gamma^a_\alpha\Gamma^b_\beta \tag{E.16}
$$

で導入すると，(E.15) は結局次のように書ける．

$$
d\omega^c = -\sum_{a<b}\varepsilon_{abc}\omega^a\wedge\omega^b+\sum_{a,b}\sum_\alpha\varepsilon_{abc}\Gamma^b_\alpha\omega^a\wedge dq^\alpha+\sum_{\alpha<\beta}\kappa^c_{\alpha\beta}dq^\alpha\wedge dq^\beta \tag{E.17}
$$

また，明らかに dq^α の外微分はゼロである．こうして，我々のケースではハメル記号は次のようになることがわかった．

$$
\gamma^c_{ba} = -\varepsilon_{abc}, \quad \gamma^c_{\alpha a} = \sum_b\varepsilon_{abc}\Gamma^b_\alpha, \quad \gamma^c_{\beta\alpha} = \kappa^c_{\alpha\beta} \tag{E.18a}
$$

$$
\gamma^\alpha_{\lambda\mu} = 0 \quad \lambda,\mu\in\{a,\alpha\} \tag{E.18b}
$$

これで (E.11) を適用するための準備が整った．実際に (E.11) を書き下すと次の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\pi^a}+\sum_{\mu,\lambda}\gamma^\mu_{a\lambda}\frac{\partial L^*}{\partial\pi^\mu}\pi^\lambda-X_a(L^*) \\
&=\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\pi^a}-\sum_{b,c}\varepsilon_{abc}\frac{\partial L^*}{\partial\pi^b}\pi^c-\sum_{b,c}\sum_\alpha\varepsilon_{acb}\Gamma^c_\alpha\frac{\partial L^*}{\partial\pi^b}\dot q^\alpha-X_a(L^*)=0
\end{aligned}
\tag{E.19}
$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^\alpha}+\sum_{\mu,\lambda}\gamma^\mu_{\alpha\lambda}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^\mu}\pi^\lambda - X_\alpha(L^*)\\ &=\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^\alpha}+\sum_{a,\beta}\kappa^a_{\beta\alpha}\frac{\partial L^*}{\partial \pi^a}\dot{q}^\beta+\sum_{a,b}\sum_{c}\varepsilon_{abc}\Gamma^c_\alpha\frac{\partial L^*}{\partial \pi^a}\pi^b - X_\alpha(L^*)=0\end{aligned} \tag{E.20}$$

まだ，$X_a(L^*)$ と $X_\alpha(L^*)$ とを明示的に書く仕事が残っている．$X_a = K_a$ と $X_\alpha = \partial^*_\alpha$ とに注意する (E.14)．これらのどちらにも，作用素 K_a が含まれている．ところで，我々のラグランジアンは χ_a を含まないので，$K_a L^* = 0$ となる．それゆえ，

$$X_a(L^*) = 0, \quad X_\alpha(L^*) = \frac{\partial L^*}{\partial q^\alpha} \tag{E.21}$$

が得られて，結局，外力の働かない場合のオイラー - ラグランジュ方程式は，(E.19), (E.20), (E.21) により次のように書けることになる．

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\pi}} - \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\pi}}\times\boldsymbol{\pi} + \sum_\alpha \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\pi}}\times\boldsymbol{\gamma}_\alpha \dot{q}^\alpha = 0 \tag{E.22a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\pi}}\cdot\boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta}\dot{q}^\beta + \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{\pi}}\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\gamma}_\alpha) - \frac{\partial L^*}{\partial q^\alpha} = 0 \tag{E.22b}$$

(E.22a) は (3.5b) と同じものである．これは実は自由剛体に対するオイラーの微分方程式の一般化とみることができるのである．実際，連結 2 円柱系が凍ったとすると，形の変化がなくなるので，$\dot{q}^\alpha = 0$ でなければならない．このとき，$\boldsymbol{\pi}$ の定義式 (3.2) は $R(\boldsymbol{\pi}) = g^{-1}\dot{g}$ となる．ここで (D.2) の記号を使うと，$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\Omega}$ と書け，また，ラグランジアン (3.1) は $L = \frac{1}{2}\sum A_{ab}\pi^a\pi^b$ となり，$A = (A_{ab})$ は定数行列である．いま，$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\pi}} = A\boldsymbol{\pi}$ であるから，(3.5b) または (E.22a) は

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\Omega}) = A\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{E.23}$$

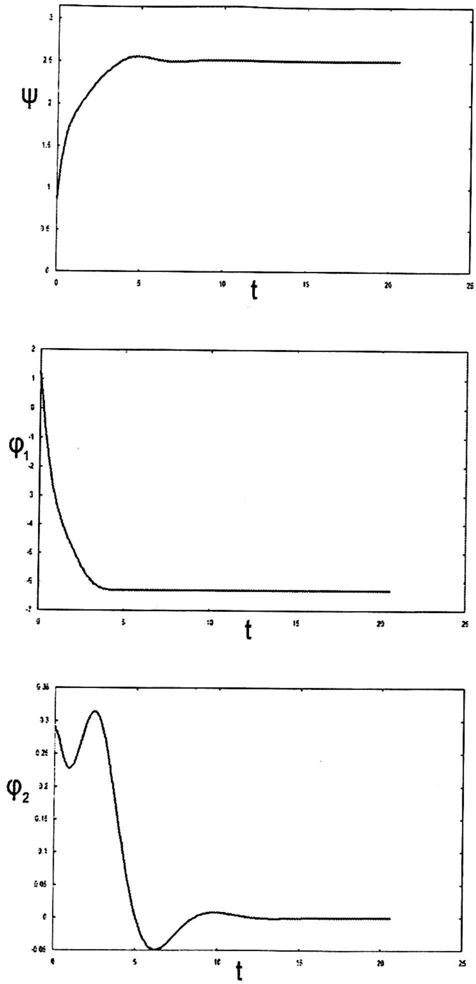
に帰着する．これは，よく知られた自由剛体のオイラー方程式である．

F　グラフ

縦軸の尺度がグラフごとに異なっていることにまず注意する．グラフから，十分時間がたつと

$q(t) \to e^{\frac{4\pi}{5}\widehat{e}_1}$, $g(t) \to e^{\pi\widehat{e}_2}$

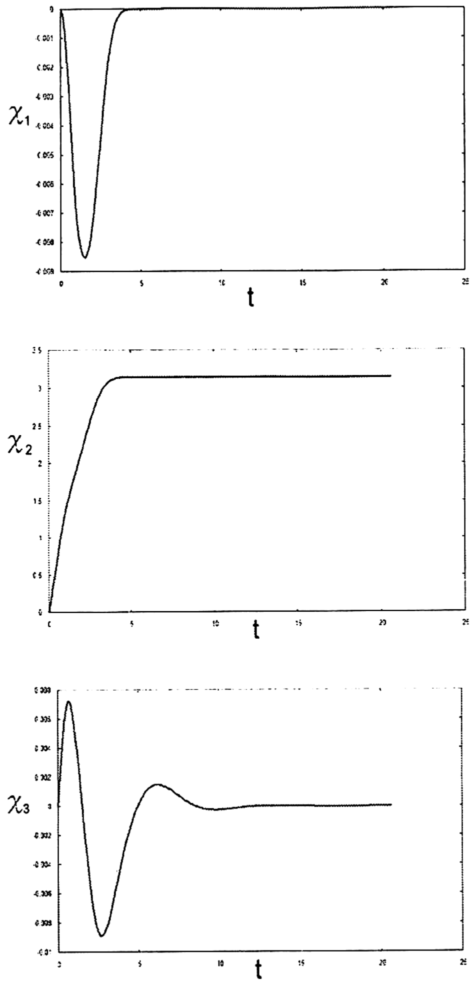
となっていることが見て取れる．



$$q(t) = e^{-(\phi_1(t)+\phi_2(t))\widehat{e}_3} e^{\psi(t)\widehat{e}_1} e^{-(\phi_1(t)-\phi_2(t))\widehat{e}_3}$$

$$\to e^{\frac{4\pi}{5}\widehat{e}_1} \quad (t \to \infty)$$

図 3　形の変化



$$g(t) = e^{\chi_2(t)\widehat{e}_2} e^{\chi_3(t)\widehat{e}_3} e^{\chi_1(t)\widehat{e}_1}$$

$$\to e^{\pi \widehat{e}_2} \quad (t \to \infty)$$

図 4　姿勢の変化

藤井一幸（ふじい・かずゆき）——横浜市立大学国際総合科学部教授
鈴木達夫（すずき・たつお）——芝浦工業大学システム理工学部准教授
浅田　明（あさだ・あきら）——信州大学名誉教授
待田芳徳（まちだ・よしのり）——沼津工業高等専門学校教授
岩井敏洋（いわい・としひろ）——京都大学大学院情報学研究科教授

数理の玉手箱

2010年10月16日　初版 第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

著　者　藤井一幸（編集）・鈴木達夫・浅田 明・待田芳徳・岩井敏洋
発行者　西原昌幸
発行所　遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野3丁目50-1
電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚3丁目21-10
電話 (03)3947-1021　Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　ISBN978-4-434-15023-4